事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	自動操縦の仕組み
副題	フィードバックの考え方

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（４）数値計算とコンピュータ	（イ）いろいろなアルゴリズム	（イ）近似値の計算	

学習内容のキーワード	観測、制御、操縦、修正、計測、近似解法	活用場面のキーワード	自動操縦、ロケットの軌道、ミサイル（弾丸）の命中、自動運転、安全性、安心感、使いやすい家電製品、

題材とその活用場面

ボールを投げて遠くにあるバスケットに上手く入れるにどうしたらよいでしょうか。何回かトライして、ボールを投げる強さや投げる角度・方向をつかんでから投げると目的のバスケットに入る確率が高くなることを経験しているでしょう。このように前回の実行結果から修正すべき量を得て、次にトライの精度を向上させるやり方を、フィードバックと言います。フィードバックの原理は、飛行機の自動操縦、動力機械の力の制御、そしてコンピュータで方法式を解くための数値解法、など様々なところで応用されます。観測、制御、操縦、修正、計測、近似解法、などの学習内容は、家庭の電気用品の運転、自動車のエンジンの制御、電車の運転制御、飛行機の操縦、などで活用され、コンピュータ技術を基盤とする現代社会を支えています。

説明

１）　フィードバックの考え方はきわめて単純です。装置に力を入れてみて、その出力を観察し、強すぎたならば次回に入力を減らし、出力が弱すぎたならば次回に少し入力を増やす、ということを繰り返して、目標とする出力に到達するというやり方が原理です（図１を参照してください）。

２）　Δｙは出力から得られた修正情報ですが、これを再び入力に戻してやる（入力しなおす）という意味で、フィードバックという名称が付されています。

３）　操作Ｆの部分を、バスケットボールをプレイしている人と読み替え、入力を腕の筋肉の力、出力をボールの飛ぶ距離と読み替えてみましょう。Δｙは、ボールが遠くに飛びすぎたのか、近いところまでしか飛ばなかったのかを示す、正解との差分です。この差分Δｙは、前回投げたボールの飛距離（出力ｙ）から得られます。差分Δｙによって次回投げる強さ（筋力ｘ）を調整することになります。

４）　飛行機の自動操縦やミサイルの誘導も同様です。目標 y_{goal} と実際の値ｙとの差分から、入力値（燃料スロットルの絞り方や方向舵の切り加減）を調整します。出力情報の一部を入力に還元している、という意味合が「フィードバック（入力への還元（お返し））」に込められているのです。

５）　数学の方程式をコンピュータで試行錯誤的に解く場合（註：数値解法、近似解法という場合もある）も、フィードバックの思想が使われます。

（新田義彦）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

註：　Δｙ＝ｙ goal －　ｙ

ｙ goal ＝　目標するｙの値

図１：　フィードバックの原理

出典情報

新田義彦（2005）「Ｗｅｂ学習における教材提示方法の検討」、経済集志、Vol.75, No.1 (2005-4) pp.1-30

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	積み木のパズルは商品開発のヒントになる。
副題	積み木を１個以上ずらして積めるでしょうか？　数列と調和級数

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（１）数列	ア　数列とその和	（イ）いろいろな数列	
高校数学Ⅲ	（３）積分法	ア　不定積分と定積分	（ウ）いろいろな関数の積分	

学習内容のキーワード	重心、調和数列、調和級数、積分、log 関数	活用場面のキーワード	数学的な見方・考え方、発想の転換、商品開発

題材とその活用場面

ここに紹介するパズルは数学的な見方や考え方を試すものです。図１のような積み木の問題を考えてみましょう。積み木を何個か重ねて置いていき、いちばん下の積み木といちばん上の積み木の位置を１個分以上ずらせることができるでしょうか。答えを見ずに考えて見ましょう。このようなパズルは遊びとしてだけでなく、商品開発や新しいプロジェクトの立ち上げに大きなヒントとなるでしょう。数学のもつ自由な発想は、経験や従来の延長線上に物事を考えるだけでなく新しいアプローチを教えてくれます。

説明

これは重心の計算問題です。いきなり答えを求めようとせず基本に戻って考えてみましょう。まず２つから始めてみます。ずらせる距離が２分の１であることは直観でわかります。さて３つ目が問題です。３つ目の積み木を右手に持って考えてみましょう。ほとんどの人はこの積み木を２つの上に積もうとしますが、どうしても倒れます。ここでヒントを与えましょう。３つめの積み木は上に積むのではなく２つの積み木の下にすべり込ませるのです。３つ目の積み木をいちばん下におき、上２つの関係を固定したまま徐々にずらしていけば、４分の１までずらすことができます。以下、４つ目の積み木は６分の１ずらしてその下におき、５つ目の積み木は８分の１ずらしてその下におきます。ずらした距離を足せば１を超えます。つまり、いちばん下の積み木といちばん上の積み木は１個分以上ずらせて積めたことになります（図２）。このような数字のならびを調和数列といい、それらの合計を調和級数といいます。調和級数は発散することが証明されています。つまり積み木がいくらでもあれば無限にずらして積めるのです（図３）。ものごとを整理し、分類し、道筋をつけ、失敗したなら別のアプローチを探すといった数学的思考法は商品開発でも役に立つでしょう。

(西山豊)

題材分類	高数Ｂ

添付図表

図１．１個分以上ずらせるか？

図２． １個ずらし

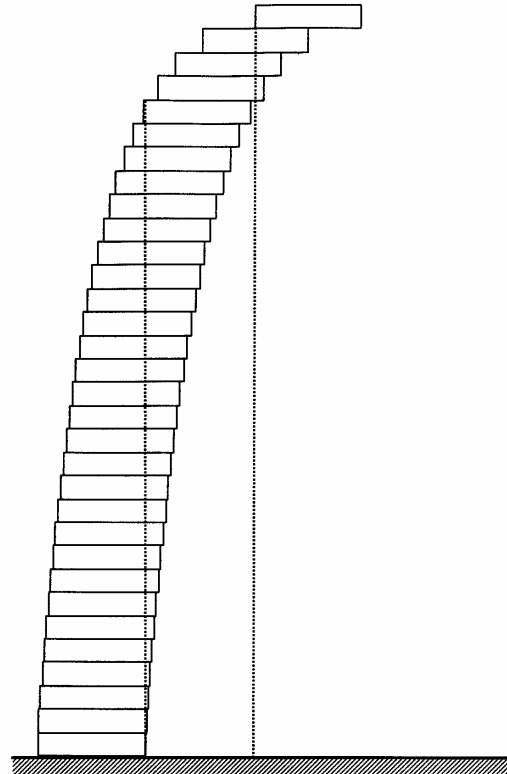



図３． ２個ずらし

出典情報

(1) 西山豊（1993）「積み木問題」『人とヒトデとサッカーボール』（三省堂）、pp.70－82

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	対戦ゲームに勝つ方法
副題	ミニマックス戦略の考え方

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の教科・科目
高校数学Ｂ	（４）数値計算とコンピュータ			

学習内容のキーワード	戦略、集合、論理、計算、利得、最大最小	学習内容のキーワード	戦略、集合、論理、計算、利得、最大最小

題材とその活用場面

少しでも性能のよい製品を買いたい、有利な会社に就職したい、などと願うのは人の常です。このような選択は、利得をめぐる相手（企業など）との対戦ゲームであると考えることができます。多数ある選択肢の中から、合理的な判断基準により有利で妥当な“手”選ぶ方法の典型が「ミニマックス戦略」です。戦略、集合、論理、利得、最大最小、などの学習内容は、ゲームプログラム、企業の経営、家計のやり繰り、などで活用され、現代情報化社会を支えています。

説明

１）**まず問題を取り上げましょう。**すでに、Ａ、Ｂ、Ｃ、Ｄ、Ｅ、Ｆの各社の入社試験に合格している、新卒業生Ｘ君が、初任給の額面にのみに注目して就職先を決定しようとしています。各社が提示している初任給の金額幅は、下記のようになっています。金額はＸ君の着任後に決定通知されます。

Ａ社：１０万円～５５万円、　Ｂ社：２０万円～４０万円、　Ｃ社：３０万円～５０万円

Ｄ社：９万円～７０万円、　Ｅ社：２５万円～４５万円、　Ｆ社：１５万円～６０万円

Ｘ君が、ｉ）慎重戦略（Ｍａｘ－Ｍｉｎ戦略）をとる場合、ⅱ）楽天家戦略（ばくち打ちの戦略、Ｍａｘ－Ｍａｘ戦略）をとる場合、それぞれどの会社を選ぶことになるでしょうか？

２）Ｍａｘ－Ｍｉｎ戦略では、相手企業はＸ君が選んだ手に対して、Ｘ君の利得（＝初任給）を最小にする“手”を提示してくると考えます。つまり

Ａ社の初任給は１０万円、Ｂ社の初任給は２０万円、Ｃ社の初任給は３０万円、

Ｄ社の初任給は９万円、Ｅ社の初任給は２５万円、Ｆ社の初任給は１５万円、

と予測し、その中で最大の利得（初任給のＭａｘ）となるものを選びます。つまり、初任給３０万円のＣ社を選択することになります。

３）新卒Ｘ君の打てる手の集合をＸ、選んだ手をｘと記し、相手（就職候補企業）の打てる手（つまり提供する初任給額）の集合をＹ、決定した初任給をｙとすると、ミニマックス戦略は、下記のように書けます。

$$\max_{x \ni X} \min_{y \ni Y} G(x, y)$$

４）楽天家戦略（ばくち打ちの戦略、Ｍａｘ－Ｍａｘ戦略）では、行く先々で最大幸福が訪れると考えますから、給与幅の上限のみを見て、７０万円のＤ社を選ぶことになります。

（新田義彦）

事例シート

題材分類	高数Ｂ

添付図表

図１．Ｍｉｎ—Ｍａｘ戦略の考え方

＃　最小利得の中の最大値を取るような戦略　＃

出典情報

新田義彦（2005）「Ｗｅｂ学習における教材提示方法の検討」、経済集志、Vol.75, No.1 (2005-4) pp.1-30

題材分類	高数Ｂ

題材主題	必要な情報や図書を探す仕組み
副題	パターン・マッチングによる文字列の照合

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（４）数値計算とコンピュータ	イ　いろいろなアルゴリズム		

学習内容のキーワード	パターン・マッチング、プログラム、関数、	活用場面のキーワード	図書館の分類コード、情報検索、探索、情報化社会、インターネット、

題材とその活用場面

皆さんは、自分が必要とする知識や情報を、図書館の本やインターネットのホームページを手掛かりに探すときにどのようにしますか。欲しい情報を表す言葉や用語（キーワード）を頭に思い浮かべて、このキーワードが乗っている本やホームページを探すでしょう。このやり方が、パターン・マッチングによる文字列探索です。膨大な知織情報をＨＰ（ホームページ）の形で公開しているインターネット上の探索（ネットサーフィン）を強力に支援してくれる探索エンジンもこのパターン・マッチングの原理で動いているのです。パターン・マッチング、プログラム、関数、などの学習内容は、図書館の分類コード、情報検索、情報探索などで活用され、インターネットを基盤とする現代情報化社会を支えています。

説明

1. 探したい情報つまりテキストが存在する場所を、Ｔ（１）～Ｔ（１００００）のような、長い変数の行列で表します。次に自分の関心のあるキーワードを、少し短い行列たとえばＰ（１）～Ｐ（６）に入れます。‘コンピュータ’につて調べたいのであれば、Ｐ（１）＝‘コ’、Ｐ（２）＝‘ン’、Ｐ（３）＝‘ピ’、Ｐ（４）＝‘ュ’、Ｐ（５）＝‘—’、Ｐ（６）＝‘タ’とします。
2. 次に、パターン・マッチング・プログラムを走らせて、Ｔ（１）～Ｔ（１００００）の先頭から１つ１つ、パターンＰ（１）～Ｐ（６）と一致する部分がないか、すり合わせながら調べます。あればその場所、つまり変数Ｔ（＊）のインデクスを報告します。
3. これがパターン・マッチングの原理ですが、膨大な文字情報を扱うためには、パターン・マッチングは、非常に高速に計算する必要があります。計算の効率を精密に議論するには「計算量」という考え方が必要になります。詳しいことは、大学の情報科学の講義を聞いて勉強してください。ここでは、ややインフォーマルに説明しておきます。
4. 図に示したような素朴なパターン・マッチングでは、探索対象となるインターネット上の文字列全体の文字数をｍ、関心のあるキーワードの長さをｎ文字とすると、計算量、つまり計算に必要な時間は、ｍｘｎｘｔ時間です。
5. パターン・マッチングの計算方法を注意深く設計するとｍｘｔ時間にまで縮めることができます。キーワードの長さを３１文字とすると、1ヶ月かかる探索の仕事が１日に短縮されることを意味しますから、大変な効率改善を意味します。

（新田義彦）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

図１．パタンーン・マッチングの仕組み

```
COUNT = 0
 FOR I=1 TO  N
        FOR J=1 TO  M
               IF T(I+J-1)  ≠  P(J) THEN GOTO LL
        PRINT I
        COUNT = COUNT + 1
        LL:
 IF COUNT = 0 THEN PRINT '検出されず'
```

図．２　パターン・マッチングをするプログラム

註：変数Ｔ（１）～Ｔ（Ｎ）の中を探索して、パターンＰ（１）～Ｐ（Ｍ）で与えられるパターンがあるかどうか調べるプログラム。あればその先頭位置をＰＲＩＮＴして知らせます。ない場合には'検出されず'と、知らせます。

出典情報

新田義彦（2005）「Ｗｅｂ学習における教材提示方法の検討」、経済集志、Vol.75, No.1 (2005-4) pp.1-30

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	標本調査と統計的推測
副題	RDD (Random Digit Dialing) 法のもとにあるもの

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（３）統計とコンピュータ	イ　資料の分析		
高校数学Ｃ	（４）統計的な推測	イ　統計的な推測	（ア）母集団と標本 （イ）統計的な推測の考え	

学習内容のキーワード	母集団、標本、標本調査、RDD 法 信頼区間	活用場面のキーワード	標本調査の方法、RDD 法

題材とその活用場面

標本調査は対象とした集団からその一部を抽出し、その集団の特性値や動向を知るために行われます。たとえば、内閣支持率がいくらで、この数ヶ月でどう変化したかとか、ある商品の使用率や売れ筋がどうかといったことです。標本抽出の方法としては、単純無作為抽出法とか層化無作為抽出法といった様々な方法が工夫されてきていますが、最近になって、RDD 法とよばれる新たな抽出法が用いられています。

RDD 法とは簡単に言えば、ランダムに発生させた電話番号をもとに電話による調査を行い必要とされる特性値を推定する方法です。標本抽出の学習は内閣支持率や視聴率調査などの場で活用されています。

説明

内閣支持率調査では約１億人の有権者母集団から n 人のランダムサンプルを抽出して調査を行います。これを計算機実験で行ってみます。真の内閣支持率を $p = 0.4$（40%）とし、ここから大きさ $n = 1{,}000$ のサンプルを抽出すると、支持率の推定値が１つ得られます。このような実験を 10,000 回繰り返し、ヒストグラムにまとめたのが図１です。これから次のことが分かります。

(1)　１回１回の結果（推定値）にバラツキはあるが平均的には真の値 0.4 のまわりに分布している。（不偏性）

(2) 結果のバラツキはほぼ 100％が［0.36, 0.44］の範囲におさまっている。

サンプルの大きさを変えて $n = 2{,}000,\ 3{,}000$ として、10,000 回の繰り返し実験を行った結果が図２、図３で、これらの結果から、更に次のことが分かります。

(3) サンプルの大きさ n が大きくなるほど、結果（推定値）のバラツキの範囲は小さくなっていること。

上記の結果は母集団比率の信頼区間の考え方を導いてくれていて、式で表せば次のようになります。p は母集団の値で、$\hat{p}$ は n 人についての調査で得られた推定値です。

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

（p についての 95％信頼区間）

RDD 法開発の背景には別の要因として、近年家庭を訪問することによる面接調査が大変難しくなっているといったことがあげられますが、上記のような裏づけがあって利用されているわけです。ただし、以上のこととRDD 法の運用上の話は別で、実際には冒頭にあげたような乱暴なやり方でなく、もっと洗練された方法で行われています。

（松井敬）

事例シート

題材分類	高数B

添付図表

図１　推定値の分布（n ＝ 1000）

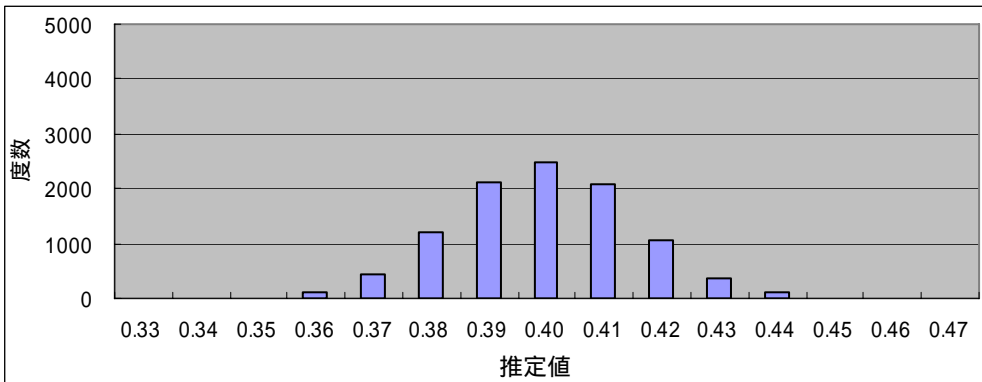



図２　推定値の分布（n ＝ 2000）

図３　推定値の分布（n ＝ 3000）

出典情報

題材分類	高数Ｂ

題材主題	複雑な問題を簡単にする方法
副題	再帰法の考え方

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（４）数値計算とコンピュータ	イ　いろいろなアルゴリズム		

学習内容のキーワード	集合、論理、計算、手続き図式、階乗	活用場面のキーワード	簡単化、繰返し、全体と部分、入れ子、アラベスク模様、ハノイの塔問題

題材とその活用場面

私達の日常は、色々な問題を解決しながら進められています。難しい問題は、簡単な問題の組み合せに変形して解決できる場合があります。問題を簡単化するコツは、問題の一部分を解決する方法を見つけて、それを全体に拡大することです。このような解法の典型例が「再帰法」です。複雑なアラベスク模様も、簡単な模様（パターン）が巧妙に繰り返されて構成されていますが、これは「再帰手続きによる複雑な模様の構成例」です。集合、論理、計算、手続き図式、階乗、などの学習内容は、種々の問題解決プログラムに活用され、インターネットを基盤とする現代情報化社会を支えています。

説明

１）まず繰り返し模様をもつ「コーヒーカップＸ」を再起的に定義してみましょう。図１を見ながら下記の定義を理解してください。

Ｘ　＝　コーヒーカップであり、その側面にＸの図柄が描かれている

２）上記のＸの定義文には、再びその定義対象のＸが、参照されていますね。これが再帰の基本的なやり方です。正確には、このような繰り返しがいつか（有限回の繰り返しの後）終了することがキッチリ保障されていなければなりません。終了を保障する文言を「停止条件」と言います。

３）よく知られている「階乗　ｎ！」も再帰的に定義できます。任意の自然数ｎに対して、その階乗は、

ｎ！　＝　１　　　　　　if　n=0

　　　=　n＊（n-1）!　　if　n=>1

７）「ハノイの塔の問題」

３本の棒Ａ，Ｂ、Ｃが、ハノイの古寺の庭に立っている。柱Ａには、ｎ枚の大きさの異なる穴あき円盤が、下から大小の順に刺さっている。このｎ枚の円盤をすべて、柱Ｃに移動せよ。ただし一回で移動できる円盤は１枚。またすべての状態で、各々の柱に刺さっている円盤は、下から大小順になっていなければならない。小さい円盤の上に大きい円盤が載っていてはならない。円盤の最小移動回数も求めよ。

８） ｎ枚の円盤の移動手順を、関数ｆ(n)で表すことにします。ｆ(n)の値は、ｎ枚の円盤の最小移動回数です。

９） 明らかにｆ(１)＝１です。１枚の円盤をＡからＣにストレートに１回で移動できるからです。

１０）　ｆ(２)はどうでしょうか？　まず柱Ａの上方の小円盤をＢに移動します。次にＡに残っていた大円盤をＣに移動。最後に、Ｂの小円盤をＣに移動。つまりｆ(２)＝３　です。

８） ｆ(３)は少し面倒です。ｎが大きい場合には、再帰の考えが威力を発揮します。

（新田義彦）

事例シート

題材分類	高数Ｂ

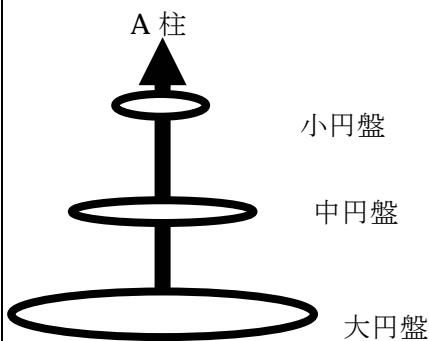
添付図表

図１．再帰によるコーヒーカップの定義

註１：コーヒーカップの側面にコーヒーカップが描かれている。

註２：描かれているコーヒーカップの側面にもまたコーヒーカップが描かれている。

註３：またまたそのコーヒーカップの側面にもコーヒーカップが描かれている。

註４：描かれているコーヒーカップが十分に小さく（%たとえば、８ポイント活字よりも小さく）なったならば、描くことを停止する（停止条件）。

（制約条件）１回に１枚の円盤を、どの柱においても上から下に小から大の順になるよう移動する。

ただし円盤に重なりがあるときは１番上の円盤だけが移動可能である。

註１）手順ｆ(n)を、少し小さい問題にすりかえて解きます。柱Ａの１番下にある最大円盤のことは、しばらく忘れます。地面と一体化してしまったと考えても結構です。残りの（ｎ－１）枚を。手順ｆ(n－１)により、柱Ａから柱Ｂにすべて、制約条件を満足しながら移動します。次に、柱Ａに残っていた最大の円盤を、１回で柱Ｃに移動します。ここでまた最大円盤は地面と同化したと見なし、しばらく無視します。次に、手順ｆ(n－１)により、柱Ｂにある(n－１)を、柱Ｂから柱Ｃにすべて、制約条件を遵守しながら移動します。これで、一件落着です。（最小）移動回数は、ｆ(n－１)＋１＋ｆ(n－１)　つまり　２ｆ(n－１)＋１　回です。簡単な計算により、これは　$２^{n}－１$　回であることが分かりますね。

ｆ(２)の場合の手順から、ｆ(３)が分かり、次にｆ(４)、・・・、ついにｆ(n)の手順が分かります。この問題は、再帰的手順以外の方法でも解けます。挑戦してみてください。

図．２　簡略版ハノイの塔の問題（円盤が 3 枚の場合）

出典情報

新田義彦（2005）「Ｗｅｂ学習における教材提示方法の検討」、経済集志、Vol.75, No.1 (2005-4) pp.1-30

事例シート

題材分類	高数Ｂ

題材主題	並べ替えの原理
副題	ソーティング・アルゴリズム

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（４）数値計算とコンピュータ	イ　いろいろなアルゴリズム		

学習内容のキーワード	順序付け、関数、プログラム	活用場面のキーワード	情報の整理、情報の探索、情報化社会、インターネット、

題材とその活用場面

幼稚園や小学校の朝礼の時間に背丈の高さの順に並び直しをしたことがあるでしょう。そのときのやり方を思い出してください。これが並べ替え、ソーティングの原理です。並べ替えは日常生活の様々な場面で活躍しています。たとえば英和辞典では単語がＡ～Ｚのアルファベット順に並んでいるから、辞書を引くことができるのです。単語が気まぐれに並んでいたのでは使いものになりませんね。人間が直観的に何気なく行っている事柄の奥に、情報処理的に深いメカニズムが潜んでいることが多いのです。順序付け、関数、プログラムなどの学習内容は、辞典の編集、インターネット上の情報分類、アドレス管理、資料の分類整理などで活用され、現代情報化社会を支えています。

説明

Ⅰ．並べ替え（ソーティング）の意味

１）変数Ａ（１）～Ａ（１００）にランダムに数値が格納されています。話をわかりやすくするために、Ａ（１）～Ａ（１００）はそれぞれ鉛筆ケースの名前であり、それぞれのケースには、長さが不ぞろいの鉛筆が１本ずつ格納されていると考えることにしましょう。

２）ケースＡ（１）～Ａ（１００）から鉛筆を取り出して、別のケースＢ（１）～Ｂ（１００）に移しますが、このとき、Ｂ（１）に１番短い鉛筆、Ｂ（２）には２番目に短い鉛筆、Ｂ（３）には３番目に短い鉛筆、・・・というように、小から大の順番に揃えます。これが〔小から大の順〕並べ替え（ソーティング）です。

Ⅱ．素朴ソーティング

１）ケースＡ（１）～Ａ（１００）を見渡して、１番短い鉛筆を探し、これをケースＢ（１）に入れます。次にまた残りのケースＡ（１）～Ａ（１００）を見渡して、１番短い鉛筆を探し、今度はケースＢ（２）に入れます。以下同様にケースＡ（１）～Ａ（１００）が空っぽになるまで繰り返す。。

２）ケースＢ（１）～Ｂ（１００）には、小から大の順に揃えられた鉛筆が納まることになりますが、これが素朴ソーティングの方法です。

Ⅲ．クイック・ソーティング

１）ケースＡ（１）～Ａ（１００）の中から適当な長さの鉛筆（これを）を１本選び、「標準鉛筆」と名づけます。標準鉛筆を、ケースＢ（５０）あたりに入れます。次にケースＡ（１）～Ａ（１００）から鉛筆を１本ずつ取り出し、標準鉛筆と長さを比較し、小さければ前の方のケース、つまりＢ（１）～Ｂ（４９）に収めます。等しいか大きければ後ろの方のケース、つまりＢ（５０）～Ｂ（１００）に収めます。

２）鉛筆は、小のグループと大のグループに大別されました。次に小グループおよび大グループの双方で、同時並行的に上記１）と同様の振り分けをして、小小グループと小大グループ、および、大小グループと大大グループに振り分けます。鉛筆は４つのグループに振り分けられました。

３）以下４つのグループのそれぞれで同様の２分割をします。

４）それぞれのグループの鉛筆が１本だけとなるまで、このような分割作業を繰り返します。

５）このやり方が、Ｑｕｉｃｋ　Ｓｏｒｔと呼ばれる最速のソーティング・アルゴリズムの原理です。

（新田義彦）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

図３．素朴ソーティング

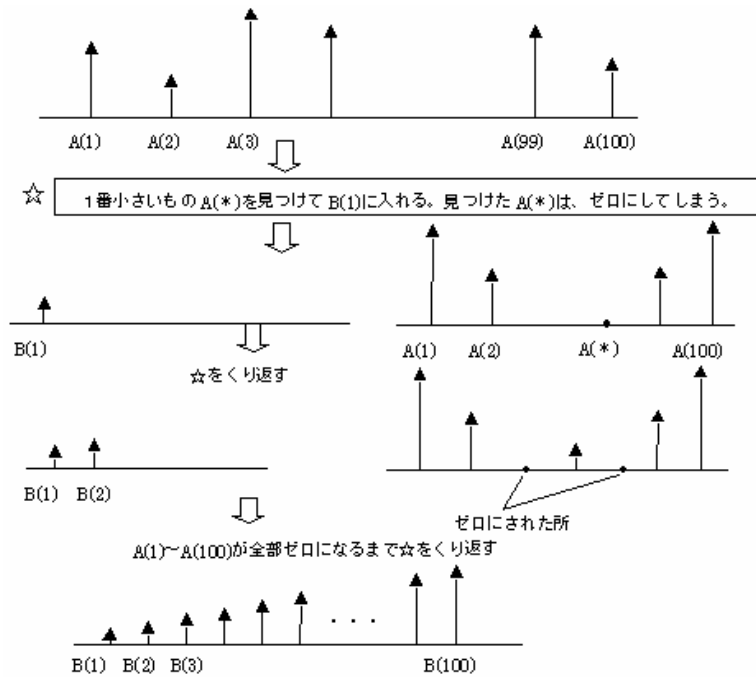
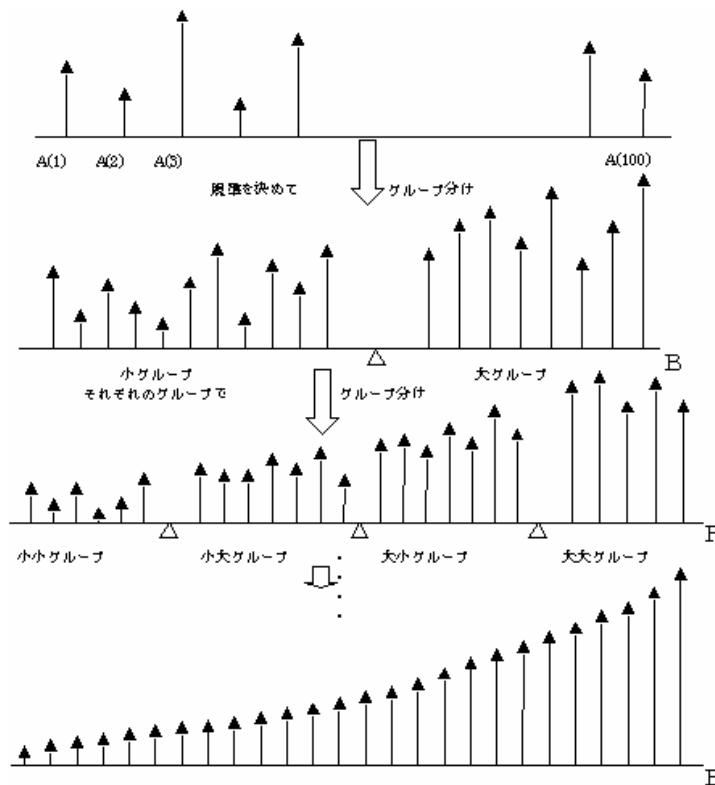



図４　クイック・ソーティング　註：一種の同時並行処理です。

出典情報

新田義彦（2005）「Ｗｅｂ学習における教材提示方法の検討」、経済集志、Vol.75, No.1 (2005-4) pp.1-30

事例シート

			題材分類	高数Ｂ
題材主題	偏差値とは何か			
副題	資料（データ）の平均とバラツキを統合する。			

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｂ	（３）統計とコンピュータ	イ　資料の分析		
高校数学基礎	（３）身近な統計	イ　資料の傾向の把握		

学習内容のキーワード	資料の平均、標準偏差、偏差値	活用場面のキーワード	偏差値は色々な場面で使われていますが、その考え方と意味を探ってみます。

題材とその活用場面

入学試験で、英語、国語および地歴公民の中の選択 1 科目の得点の合計によって受験生を選抜するといったことはよく見られます。このとき、地歴公民の 4 科目（日本史、世界史、地理、公民）の難易度は異なっていて、有利不利が生ずるのではないかと考える人がいると思います。センター試験でも複数科目を持つ教科で科目間の結果の調整が話題になることはよく知られています。このような問題をどう扱うかには難しい点がありますが、ここでは偏差値との関連で考えてみます。統計の学習は入学試験や模擬試験などの場でも活用されています。

説明

それぞれ 8 人ずつの受験生の日本史と世界史の試験結果が下表のように与えられたとします。実際には受験者数は何百、何千人でしょうし、科目数も 2 科目以上でしょうが、以下に述べる考え方は一般の場合でも全く同じです。この例では日本史の結果を全体に高得点で得点の散らばりが小さいとし、世界史は低い点から高い点まで広く分布していると設定してみました。図も参考にしてください。

偏差値は、科目間の平均の差を調整し、バラツキ（標準偏差）の大きさを揃えることによって作られた変量で、次の式によって表されています。

得点 x の人の偏差値 = 10×(x － 平均)／標準偏差 ＋ 50

たとえば、日本史 85 点の受験生の偏差値は 10×(85－80.0)／6.65＋50 = 58 となります。なお、全受験者にわたっての偏差値の平均は 50，標準偏差は 10 となっています。

これを素点とあわせて図示してみました。平均とバラツキの違う 2 つの科目の偏差値が平均を 50 とし、標準偏差 10 の軸に調整されて収まっていることが分かると思います。いってみれば、偏差値は異なる物差しで測られたものを、共通な物差しで比較しているということになります。

仮に、もとの成績の分布が正規分布とよばれる分布にしたがっているとすると、次のようなことが言えます。偏差値 40 ～ 60 の割合が全体のほぼ 68%、偏差値 30 ～ 70 の割合が全体のほぼ 95%。これから偏差値ごとに更に細かな割合が求められます。偏差値による輪切りというのは、このような数字を無原則に適用していることによって生じているのです。（松井敬）

題材分類	高数Ｂ

添付図表

出典情報

表：受験生の日本史と世界史の素点と偏差値

受験生	1	2	3	4	5	6	7	8	平均	標準偏差
日本史（x）	85	75	82	90	80	72	70	86	80.0	6.65
世界史（y）	50	70	67	40	90	77	80	54	66.0	15.76
偏差値（x）	58	42	53	65	50	38	35	59	50.0	10.0
偏差値（y）	40	53	51	33	65	57	59	42	50.0	10.0

図：素点と偏差値の相互関係

事例シート

題材分類	高数Ｃ

題材主題	デリバティブ取引のリスク計算式
副題	確率・統計の金融への応用

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｃ	（３）確率分布 （４）統計処理	イ　確率分布 ア　正規分布	(ア) 確率変数と確率分布	発展的学習

学習内容のキーワード	正規分布、確率微分方程式	活用場面のキーワード	デリバティブ、ブラックショールズ方程式、コール・オプション

題材とその活用場面

株に関する金融商品の中には、一定の値で株を買う権利(コール・オプション)を売買することがある。一種の先物取引で、もし、株が値下がりして、その値段が満足できなければ、この権利は放棄できる。ただし、その権利を買った分の費用は損失することになる。確率の学習により、この取引のプレミアムを計算できる。

説明

自然科学、工学、経済学のいろいろな状態は、微分方程式の解として記述されます。ところが、実際はそこにランダムな影響が加わる場面が多くあります。最も典型的なランダム量はブラウン運動とよばれ、その研究から確率論が起こってきたといってよいものです。

日本の伊藤清はブラウン運動を含む微分方程式を確率微分方程式として導入しました。その解はランダムな影響をうける状態を表現できるものとして、さまざまな応用が考えられてきました。

アメリカのM.ショールズらは、この理論の応用の一つとして、ブラック・ショールズ方程式を発表しました。この方程式は、デリバティブ取引に用いられて一時期大成功を収め、有効性を認められました。

この業績によって、M.ショールズらは、ノーベル経済学賞を受賞しました。しかし、その後のロシア金融危機では失敗し、大きな変異には弱点があることも示されましたが、今なお有力な理論の一つです。なお、伊藤自身もその元になった確率微分方程式に関する業績によって1998年に京都賞を受賞しました。

ある期日にある価格で原資産（株やもの）を買う「権利」をコール・オプションという。これは、その期日に価格が満足できなければ放棄することができる。ただし、オプションの購入代金は損をする。

これに対してのプレミアムＰのブラックショールズ式での計算式は添付図表欄にあります。

（岡部恒治）

題材分類	高数C

添付図表

$P = S \cdot N(d) - Ke^{-rt} \times N\left(d - \sigma\sqrt{t}\right)$
ただし、

$$d = \frac{\log_e\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \times t}{\sigma\sqrt{t}}$$

ここで、
S：　原資産の現在の市場価格
X：　権利行使価格
t：　満期までの年数
r：　短期金利(安全利子率)
σ：　原資産の価格変動率、年率で
$N(d) = 1 - I(d)$　(下の説明参照)

ただし、上の表のＩ（ｄ）とは、以下の図の標準正規分布のグラフのｔ＝ｄとしたときの灰色部分の面積を表す(グラフとｘ軸で囲まれる部分全体の面積を１とする)。

出典情報

事例シート

題材分類	高数C

題材主題	河川の水位をとらえる。
副題	最大値の標本分布とは？ どんなことが得られるでしょうか。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学C	（３）確率分布 （４）統計処理	イ　確率分布 イ　統計的な推測	（ア）確率変数と確率分布 （イ）統計的な推測の考え	

学習内容のキーワード	確率分布、標本分布、統計的推測	活用場面のキーワード	最大値の分布とその利用

題材とその活用場面

統計的推測では母平均μの推定に標本 $X_1, X_2, \ldots X_n$ にもとづく標本平均 $\overline{X}$ を使います。標本平均 $\overline{X}$ は母平均 μの推定量とよばれますが、実は$\overline{X}$ 自身も母集団分布に関連したある分布に従っており、それを$\overline{X}$ の標本分布とよんでいます。標本分布はなかなか分かりにくい概念です。

ある河川での水位データをもとに経験的に平均値や最大値の標本分布を説明します。データとしては北海道、尻別川の観測地点「名駒」の毎日の水位データを使います。日常的に得られる統計データの整理についての学習は、河川の堤防の高さの推定にも活用されます。

説明

ある河川のある地点での水位を毎日測定すると、1 年 365 日分の水位データが得られます。これらの平均をとると、年間の平均水位が得られます。同様に、１年を通しての最高水位（最大値）や最低水位（最小値）といったデータも得られます。これを何年にもわたって調べていけば、標本平均や最大値のデータの集合が得られます。これらの総体によってつくられる分布が、経験的な意味での標本平均 $\overline{X}$ の分布であり最大値 Mx の分布となります。

図１にあげたのは観測地点「名駒」における水位観測データの分布（ヒストグラム）です（2000 年）。この年の平均水位は 2.25m、最高水位は 5.25mでした。この水位の分布は正規分布とは程遠い形をしていますが、水位にかかわる母集団の分布関数を$F(x)$、平均をμ、分散をσ^2とおけば、標本による平均水位$\overline{X}$の分布は中心極限定理とよばれる定理によって平均μ、分散 σ^2/n の正規分布に従うことが知られています。

最大値の場合はどうでしょうか。分布関数$F(x)$からの大きさ n のランダムサンプルにもとづく最大値の分布 $G(x)$ は $G(x) = \{F(x)\}^n$ となることが知られています。上に上げた「名駒」での水位データは過去 36 年にわたって、インターネット上で得られますが、このデータによる最大値の経験的な分布は図２のようになっています。

最大値の分布を知ることはその河川の 10 年に 1 回、50 年に 1 回といった河川の水位の状況を知ることにつながり、これは河川の氾濫などに備えて堤防その他の面で適切な対策が立てられることにつながります。

（松井敬）

題材分類	高数C

添付図表

図１：名駒の年間水位の分布

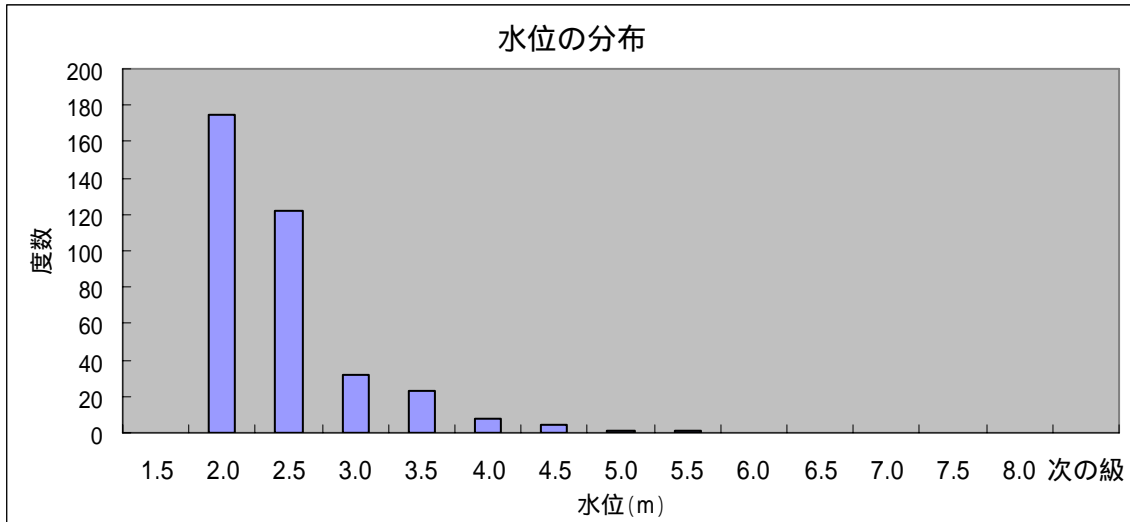
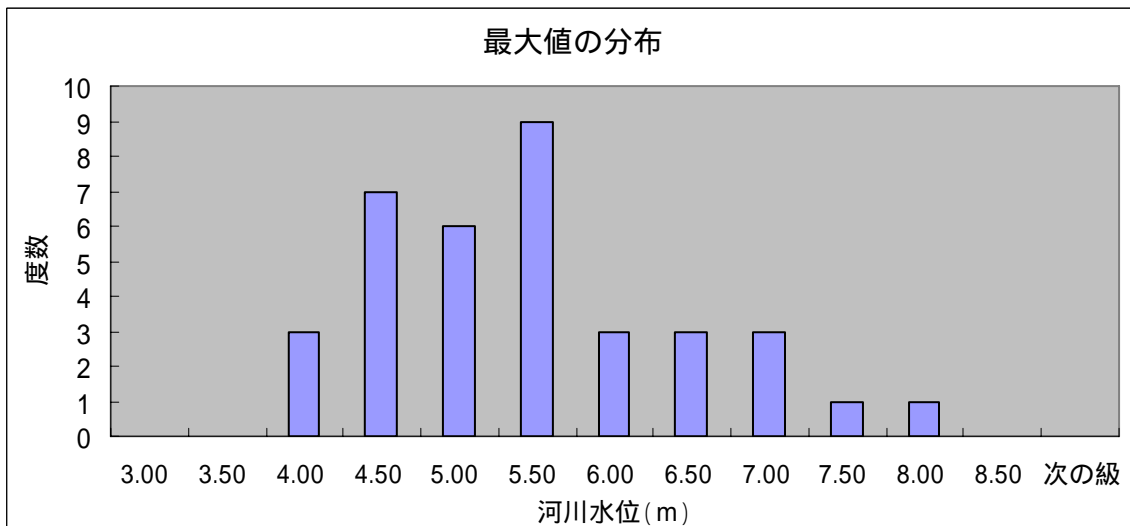



図２：水位の最大値の分布（1965－2000 年）

出典情報

http://www.river.go.jp/　（国土交通省、日本の様々な河川の現在と過去の水位情報が見られます）

事例シート

題材分類	高数Ｃ

題材主題	歯車の歯はどんな曲線
副題	尖った歯車の歯はありません。どんな曲線を利用しているのでしょうか。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｃ	（２）式と曲線	イ　媒介変数表示と極座標	（ア）曲線の媒介変数表示	

学習内容のキーワード	サイクロイド，アルキメデスの渦巻線，カージオイド，リサージュ曲線	活用場面のキーワード	曲線の媒介変数表示，極座標

題材とその活用場面

２軸の間に回転運動を伝える方法の１つに直接接触による方法があり，歯車はその方法の１つで，動力を伝えたいとき，速度を変えたいとき，回転の向きを変えたいときなどに用いられています。

歯車は重要な機械部品で，時計，自動車，エレベータ，船舶や発電所のタービン等に使われています。また，からくり人形などにも使われていたようです。

このように，歯車は多くの動力伝達用の機械に広く用いられています。

曲線の学習は、工業分野等で活用されています。

説明

２つの歯車がかみ合って一定の回転を伝えるための歯形として，インボリュート歯形，トロコイド歯形，サイクロイド歯形，円弧歯形などいろいろな歯形がありますが，歯の強さ，互換性，製作の難易，歯面の摩耗などから，サイクロイド曲線，インボリュート曲線が使用されています。

円が定直線上を滑ることなく回転していくとき，その円周上の定点が描く曲線を「サイクロイド曲線」と呼びます。この定点が円周上でなくて，円の内部にあったり外部にあったりしても似たような曲線が得られます。これを「トロコイド曲線」と呼んでいます。

円が回転するところを“定直線”から“定円”へと変えてみましょう。円が定円の内側を周に沿って転がるとき，動円の円周上の定点が描く曲線を「内サイクロイド」，定円の外側を転がるときは「外サイクロイド」といいます。主に時計等の歯形に使用さられているそうです。

円に巻き付けた糸をほどく時，糸の端が描く曲線を「インボリュート曲線」と呼んでいます。（図１）

インボリュート曲線を輪郭にもつ歯形を互いに接触させると，接点は一定の直線上を進み，２つの歯車の速度伝達比は一定となるので，現在，多くの歯車でインボリュート曲線の一部を歯形（図２）として使用しています。

（佐藤功）

事例シート

題材分類	高数Ｃ

添付図表

図１

図２

出典情報

機械設計２（実教出版）

http://www.kyoto.zaq.ne.jp/inv72net/

題材分類	高数Ｃ

題材主題	楕円面の利用
副題	体外衝撃波破砕装置（ESWL）

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
高校数学Ｃ	（２）式と曲線	ア　二次曲線	（イ）楕円と双曲線	

学習内容のキーワード	楕円、楕円面、焦点	活用場面のキーワード	医療現場

題材とその活用場面

腎臓結石等を手術によって取り除くのは患者に多大の負担を強いることになる。体外から強い衝撃波を与えることにより、手術をせずに結石を破壊できれば、患者の負担はかなり軽減される。医療現場では、楕円面の性質を利用した「体外衝撃波破砕装置」を利用することによりこの処置が行われている。

説明

２定点からの距離の和が一定な点の軌跡が描く曲線を楕円と言う。その２つの定点をその楕円の焦点という。この楕円をｘ軸を回転の軸として回転して出来る回転面を楕円面という。楕円面には１つの焦点で衝撃波を発生させると、この衝撃波はもう１つの焦点に集まると言う性質がある。ｘ成分が正である半楕円面を考える（体外衝撃波結石破砕装置）。この半楕円面の２つの焦点のうちのもう１つの焦点の位置が丁度結石の位置であるようにする（X 線で結石の位置を確認する）。片方の焦点で衝撃波を発生させるとこの衝撃波はもう１つの焦点（結石）に集中し結石が破砕され尿と共に体外に排出される。

(山内一也)

題材分類	高数C

添付図表

腎臓結石や尿管結石に衝撃波をあてて石を破砕する装置です。

ドルニエル（Dornier）（メディックシステム）社　リソトリプターが有名である

出典情報

http://www.niigatah.rofuku.go.jp/xray/eswl.htmlを参照

題材分類	中数１

題材主題	２の累乗の近似の仕方
副題	１ＧＢはなぜ半端なのか

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学１年	Ａ　数と式	(1)　正の数、負の数		
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	イ　指数関数と対数関数	（イ）指数関数 （ウ）対数関数	

学習内容のキーワード	累乗計算、指数・対数、２進法	活用場面のキーワード	ハードディスクの容量、メインメモリー

題材とその活用場面

　チラシやＷｅｂでのコンピュータの紹介の中の仕様を読むと、ハードディスクやメモリーの容量が半端なことがあります。また、「約 60ＧＢ」などと書かれていることもあります。なぜキッチリした値にならないのでしょうか？これは、２の累乗計算の近似値を使っているからです。コンピュータの容量と指数・対数の学習が深く結びつきます。

説明

確かに、コンピュータの取扱説明書の仕様の表を読んでみると、「Windows のシステムでは、１ＧＢを、1,073,741,824 バイトで計算しています」と書かれています。

こんな半端な数が出てくる理由は、コンピュータが２進法を用いているからです。２進法は、電流のオンとオフで明確に１と０に決められるので、コンピュータにとって便利なのです。

そうなると、ハードディスクやメモリーの容量も２進法のほうが便利ということになります。

10 進法のときはそのまま数を書いて、２進法で表したときｎと書かれる数を $n_{(2)}$ と表記すると、２進法でのキッチリした数の $10_{(2)}$ 、$100_{(2)}$ 、$1000_{(2)}$、…などは 10 進法でどう表されるのでしょうか？

$10_{(2)}=2^{1}=2$、$100_{(2)}=2^{2}=4$、$1000_{(2)}=2^{3}=8$、$10000_{(2)}=2^{4}=16$、$100000_{(2)}=2^{5}=32$、
$1000000_{(2)}=2^{6}=64$、$10000000_{(2)}=2^{7}=128$、$100000000_{(2)}=2^{8}=256$、$1000000000_{(2)}=2^{9}=512$、
$10000000000_{(2)}=2^{10}=1024$

このように、コンピュータでキッチリした数は、10 進法ではすべて半端な数になってしまいます。そこで、$10000000000_{(2)}=2^{10}=1024$ のところを利用して、$10000000000_{(2)}$ を約 1000 として表記する方法が取られています。$10000000000_{(2)}$ Ｂ（バイト）＝１ｋＢ（キロバイト） $10000000000_{(2)}$ ｋＢ（キロバイト）＝１ｍＢ（メガバイト） $10000000000_{(2)}$ ｍＢ（メガバイト）＝１ＧＢ（ギガバイト）としているのです。

さて、最初の 1,073,741,824 を 1024 で割ってみましょう。その商をさらに 1024 で割ると商が 1024 になることがわかります。こうして、１ＧＢ＝1024×1024×1024 バイトとわかります。これを「約$(10^{3})^{3}$バイト＝約 10 億バイト」と考えます。

この換算法は、2^{100} の近似計算にも使えます。$2^{100}=(2^{10})^{10}\fallingdotseq(10^{3})^{10}=10^{30}$ となります。そして、これは、対数の概念につながっています。$2^{10}\fallingdotseq10^{3}$ は $2\fallingdotseq10^{0.3}$ を意味するからです。

（岡部恒治）

事例シート

題材分類	中数１

添付図表

２進法と対数の関係を図で見てみよう。

横軸に数をとって、その２進法の表現を図のように描いていくと、ある曲線が描かれる。これは、

$y = \log_2 x$

のグラフになっている。

出典情報

なし

事例シート

題材分類	中数１

題材主題	円が正方形に!?
副題	マス目や格子点上における図形の見方

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学1年	Ｂ　図形	（１）平面図形		
中学数学2年	Ｃ　数量関係	（２）確率の理解		
高校数学基礎	（２）社会生活における数理的な考察	イ　身近な事象の数理的な考察		
高校数学A	（３）場合の数と確率	ア　順列・組合せ		

学習内容のキーワード	平面図形　　順列・組合せ	活用場面のキーワード	マス目上の道路　　格子点

題材とその活用場面

東西南北にマス目上に道路が整備されている場所では、ある地点へ移動するときの経路は必ずしも一つとは限りません。マス目上での最短経路を数え上げていく際には、場合の数や順列の計算が活用できます。また、マス目や格子点上での等しい距離を調べるには、平面図形の内容とは違った図形の見方も出てきます。

場合の数や順列、あるいは格子点上で図形を考える学習は、道路上でルートを考える場面に活用されます。

説明

京都市内の道路などは東西南北にマス目状に整備されています。（図１）ふつう平面上では、２点Ａ，Ｂ間の最短経路は線分 AB の長さとなります。しかし、道路上での最短経路は、「堀川通→丸太町通ルート」もあれば「四条通→烏丸通→丸太町通ルート」など、何通りか考えられます。（図２）

この最短経路の数は、実際に起こりうる場合の数を調べていけばよいのですが、順列の計算を使えば簡単に求めることができます。　式は、$\frac{5!}{3!2!}=10$　となり、10 通りという答えがえられます。

このマス目上の話題は、格子点上の話題に置き換えて考えることができます。（図３）ただし、移動のしかたはマス目上のときと同じように、「上・下・左・右のいずれかの道で行ける最短の距離」とします。格子点上では、中学１年で学習する平面図形の内容とは違った見方が出てきます。

たとえば、平面図形の学習では、「一つの点から等しい距離にある点の集まり」という条件を満たす図形は円でした。点Ｏから３cm の距離にある点の集まりは、半径３cm の円になるということです。ところが、格子点上で考えると、点Ｏから３cm の距離にある点の集まりは正方形になります。（図４）実際、都市などの道路上での等しい距離をイメージするときには、こちらのほうが適していることもあるはずです。

では、「２点Ａ，Ｂからの距離が等しい点の集まり」はどうなるでしょう。平面上では、２点Ａ，Ｂの位置にかかわらず、線分ＡＢの垂直二等分線になります。しかし、格子点上では、例えば図５のようになります。しかも、Ａ，Ｂの位置によっては、点の集まりが変わってきます。（図６）さらには、２点間の距離が奇数になると、条件を満たすような点は存在しない、という結果にもなります。

この格子点を使った図形のいくつかの見方や考え方は「タクシー幾何学」ともよばれ、数学の研究の分野の一つとなっています。

（山崎浩二）

題材分類	中数１

添付図表

図１

図３

図２　　道路上での最短距離のルートの例

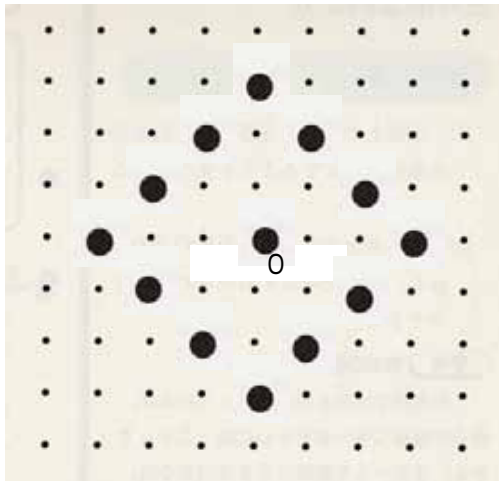



図４

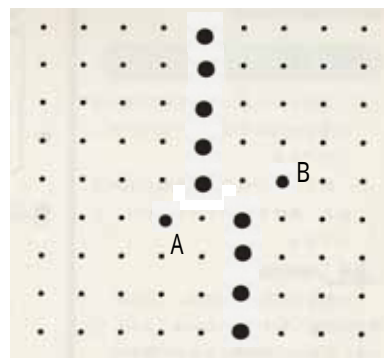



図５

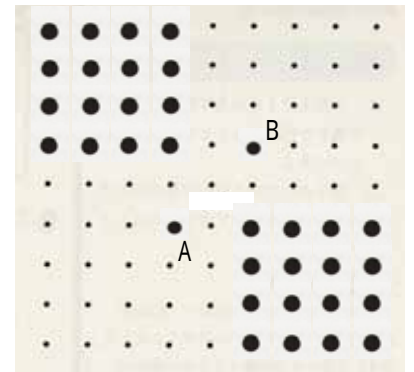



図６

出典情報

ロブ・イースタウェイ，ジェレミー・ウィンダム（水谷淳訳）（2003）「数学で身につける柔らかい思考力」，p.67，ダイヤモンド社

山崎浩二・鈴木誠（2002）「21 中学授業のネタ　数学２」，pp.110－111　日本書籍

題材分類	中数１

題材主題	外出先からお風呂や暖房を遠隔操作			
副題	方程式の利用で条件を入力すると、火力を自動調整			
学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学１年	Ａ　数と式	（３）一元一次方程式		

学習内容のキーワード	活用場面のキーワード
一元一次方程式	遠隔操作 風呂 電話

題材とその活用場面

ホームエレクトロニクスの進歩は、外出先から自宅の冷暖房などの家電や風呂を電話によって遠隔操作できるまでになってきました。例えば、300 リットルの浴槽に風呂の湯をためることを考えます。入浴時刻や湯の温度を入力すると、水道の水温との差から必要な熱量を計算し、給湯能力に照らし合わせることで点火時刻が算出できます。一元一次方程式の学習は、ホームエレクトロニクスの分野で活用されています。

説明

水温 T_A 度の水 Vcm^3 を T_B 度まで温めるのに必要な熱量は次式で与えられます。

$$Q=V(T_B-T_A) \quad (cal)$$

これを給湯器の能力で除せば、必要な時間を算出できます。

たとえば、容積が 300 リットルの浴槽について、水温 15℃の水から 40℃の湯を得る場合を考えます。給湯器の能力を毎秒 10000cal とすれば、１cm^3 の水を水温１℃あげるのに必要な熱量が１カロリーなので、300 リットルの水を 25℃上昇させるのに必要な熱量についての方程式は次のようになります。

$$300\times10^3\times(40-15)=10000t$$

これを解くと、

$$t=750\ (秒)$$

すなわち、12 分 30 秒で風呂が沸かせることがわかる。

（石田唯之）

題材分類	中数１

添付図表

出典情報
東京ガスホームページ　http://home.tokyo-gas.co.jp/tes/remote/service1.html

事例シート

題材分類	中数１

題材主題	牛丼店を経営しよう
副題	店舗経営に一次方程式を利用する

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
数学中学１年	Ａ　数と式	（３）一元一次方程式		

学習内容のキーワード	一次方程式	活用場面のキーワード	店舗の経営 損益計算

題材とその活用場面

店舗の経営計画を立てるにはさまざまな要素を含んだ損益の計算予測が必要です。ここでは、牛丼店を例として、販売単価や原価、来客数や営業時間などを仮定して経営予測をしてみましょう。一次方程式を学習し、これを活用することが、店舗経営に役立つことがわかります。

説明

次のような事例を考えましょう。

下記の条件で当初の収益を見込み、牛丼店を開店しましたが、他店との価格競争があって、値段を半額にしなければならなくなりました。１時間あたりの来客数が何人あれば、当初の利益を見込むことができるでしょうか。

牛丼１杯の値段	４００円
牛丼の１杯の原価	１００円
来客数（１時間あたり）	３０人
店員の人数	２人
店員１人の時給	１０００円
営業時間	午前８時～午後８時（12時間）
店の家賃（１ヶ月）	１００万円

まず、当初予定した１ヶ月あたりの収益は次のように計算することができます。

$\{(400-100)\times 30-1000\times 2\}\times 12\times 30-1000000=1520000$ 円　…　①

一方、値段を半額にした上で当初の利益を確保するには、

$\{(200-100)\times n-1000\times 2\}\times 12\times 30-1000000=1520000$ 円　…　②

これを解くと、$n=90$（人）となります。ただし、その際①と②を比較して｛　｝の中どうしで方程式を立てるなど工夫することができます。

また、値段を半額にしても来客数が２倍（１時間あたり６０人）にしかならなかったら、当初の利益を確保するには営業時間を何時間にしなければならないかといった設問を加えるなど状況に応じた扱いができる。

（石田唯之）

題材分類	中数 1

添付図表

出典情報

題材分類	中数１

題材主題	視力検査に反比例!?
副題	ランドルト環の大きさと視力との関係

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学1年	C　数量関係	（１）比例と反比例		

学習内容のキーワード	反比例　逆数	活用場面のキーワード	視力検査　ランドルト環

題材とその活用場面

視力検査は、C の形をした黒い輪をある一定の距離から見て、その切れ目の方向の判断で測定していきます。この黒い輪はランドルト環と呼ばれ、今から 100 年ほど前にランドルトという人が考案したものです。このランドルト環の形には、いろいろな意味が含まれています。その中には、反比例の関係なども見つけ出すことができます。

比例や反比例の学習は、視力検査の中でも活用されています。

説明

ランドルトは、視力検査表のもとをつくるにあたって、次のようなきまりをつくりました。

直径 7.5mm、太さ 1.5mm で、１ヶ所が 1.5mm 切れている黒い輪を５ｍ離れているところから見て、どこが切れているかがわかれば、視力を 1.0 とすることにしました。今からおよそ 100 年前の国際学会で提案され、以来今日まで採用されています。（図１）切れ目の 1.5mm は、５ｍ離れたところから見てちょうど $\frac{1}{60}$ °（１分）にあたるものです。（図２）

ランドルト環には、いくつかの数学的な内容が活用されています。

たとえば、視力のよい人はもっと小さなランドルト環が見え、逆に視力の悪い人はこれより大きなものしか見ることができません。そこで、視力とランドルト環の大きさとの関係に反比例が活用されます。つまり、視力 2.0 の人は、1.0 のランドルト環の $\frac{1}{2}$ の大きさのものが用いられます。また、視力 0.5 の人は、1.0 のランドルト環の２倍の大きさのものまでが見える、ということなります。

一般的には、視力を a とすると、見えるランドルト環の大きさは次のように式で表されます。

ランドルト環の直径・・・7.5÷a　（mm）　　太さと切れ目の長さ・・・1.5÷a　（mm）

この式を用いると、視力 0.1 の人が見えるランドルト環の直径は 75mm となり、それも見えないとなると、さらに大きなものが必要になります。そこで、視力 0.1 をこえるものについては、検査表までの距離を近づけて行うことにしています。そのときは、次のような計算式にあてはめられます。

0.1×距離（m）÷５＝視力

つまり、検査表まで２ｍの位置で、0.1 のランドルト環が見えた人は、0.1×２÷５＝0.04　となります。（図３）

最近の視力検査については、ＡからＤまでの４段階で記すものがありますが、やはりランドルト環がもとになっていることに変わりはありません。

（山崎浩二）

題材分類	中数 1

添付図表

図１　ランドルト環（実物大　0.1 用）

図２　ランドルト環と切れ目の大きさ

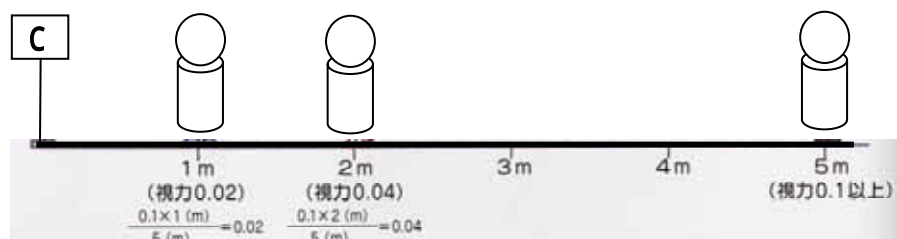



図３　ランドルト環と距離との関係

出典情報

茂木俊彦監修、池谷尚剛編、稲沢潤子文（1998）「障害を知る本６　目の不自由な子たち」，pp.4－5，大月書店

infoseek ホームページ　雑学見聞録 No.037　「視力検査の C」　2005 年 1 月 30 日　以下より検索，

URL: http://fleshwords.at.infoseek.co.jp/dt/dt037.

事例シート

題材分類	中数１

題材主題	変数の考え方
副題	変数はいろいろなところで無意識に使われている

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学１年	Ａ　数と式	（２）文字式		

学習内容のキーワード	変数　　式	活用場面のキーワード	節約 家計簿

題材とその活用場面

大学生になり、親元を離れて一人暮らしを始めると、生活していく上で多くのことに出費している事に気が付きます。家賃や光熱費のほかにも、食費や服を買ったり遊ぶためなどにお金をたくさん出費してしまいます。

それぞれの項目を変数としてとらえることで、何に対して多く出費しているのかが分かります。各項目を変数と考える事で、お金の使い方を見直すことができ、節約にもつながってきます。

一人暮らしをしていても、していなくても、月末になって、お金が足りないという経験はありませんか。

説明

お小遣いでも仕送りでも、計画なく使うとその額以上に使いすぎてしまうことがあります。その額を超えないだけでなく、少しでも少ないお金でやりくりできる事が理想です。　一人暮らしをしていない人でも出費するのは、食費、服や靴や化粧品などの生活雑貨費、ＣＤ類を買ったり遊ぶ時にかかる趣味・娯楽費だと思います。　この３つを変数として、それぞれx_1, x_2, x_3とおきます。　これらを用いると、１ヶ月の出費ｙは、$y = x_1 + x_2 + x_3$で表す事ができます。これをモデルとして、実際に数値を入れて考えてみます。下の表のとおりだとすると、$x_1 = 16000$、$x_2 = 30500$、$x_3=8500$ より、$y = 16000+30500+8500=55000$ となります。

	食費：x_1	生活雑貨費：x_2	趣味・娯楽費：x_3	出費：ｙ
１週間目	4000	500	4000	8500
２週間目	4000	0	2500	6500
３週間目	4000	30000	1000	35000
４週間目	4000	0	1000	5000
合計	16000	30500	8500	55000

各項目を変数としてとらえることで、3 週目の出費が一番多いことに気が付きます。生活雑貨費が多くなってしまった原因を考えたりして、これからはこうしようという工夫をする手がかりをつかむ第一歩になります。ひとつの変数としてみると、中には携帯電話の使用料金の様に式で考えられる場合もあります。

このように各項目を変数としてみると１ヶ月の生活におけるお金の使い方の見通しがよくなります。

（鈴木俊夫）

題材分類	中数１

添付図表

	食費	服・靴	化粧品	本・CD	生活雑貨	交通費	娯楽費	出費
1月15日(土)	昼:1000	13800	0	1200	1200	1280	0	18480
16日(日)	0	服:35000 靴:12800	3200	0	500	800	美容院:6500	58800
17日(月)	昼:181 夜:860	0	0	3000	0	1280	0	5321
18日(火)	昼:210 おやつ:210	0	0	0	0	0	0	420
19日(水)	昼:230 夜:1000	0	0	0	180	0	0	1410
20日(木)	昼:181	0	500	2800	0	0	0	3481
21日(金)	昼:210 おやつ:360 夜:1200	0	0	0	0	0	ボーリング:1300 ビリヤード:1000	4060
合計	5632	61600	3700	7000	1880	3360	8800	91972

出典情報

事例シート

題材分類	中数１

題材主題	万華鏡で感動を！
副題	万華鏡に見られる対称な図形の「美」

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学1年	Ｂ　図形	（１）平面図形	ア　線対称・点対称の理解	

学習内容のキーワード	線対称　点対称	活用場面のキーワード	万華鏡

題材とその活用場面

万華鏡は、誰でも一度は手にしたことのある玩具でしょう。覗けばそこに広がる幾何学模様に感激する人も少なくないはずです。この幾何学模様の多くは、万華鏡の中に入っている何枚かの鏡による図柄の反射でつくられています。つまり、鏡によってなされる線対称や点対称の繰り返しなのです。

万華鏡は、現代では、玩具の域を越えて、アートの一つにもなっています。世界的な万華鏡作家やコレクターも多いということです。対称という図形の見方の学習は、玩具や美術の中にも活用されています。

説明

日本でいちばん多く見られる万華鏡は、「３ミラー・システム」とよばれる、３枚の鏡を三角形に組み合わせて筒の中に入れたものです。玩具などの多くは、それが正三角形になるように組み合わされています。筒の長さは約 20cm で、これはヒトの目のほぼ焦点距離に相当しています。（図１）

万華鏡を覗いたときに見える模様は、１つの小さな模様が、鏡によって反射を繰り返したものです。

たとえば、鏡を正三角形に組み合わせた場合には、正三角形の各辺が鏡によって対称の軸の役割をなします。よく見ると、もとの１つの図柄が、次々と折り返されているのに気がつくと思います。つまり図柄どうしが、線対称や点対称になっているのです。（図２）

回転させると模様が次々と変化していく万華鏡（チェンバー・スコープとよびます）がありますが、これは、回転することでもととなる図柄が変わっていくからです。

筒に入れる３枚の鏡は、他にも 60°と 30°の直角三角形や直角二等辺三角形に組み合わせるものがあります。（図３・４）また、２枚の鏡を使って三角形に組む（１面は反射しない面にする）ような「２ミラー・システム」、４枚の鏡を組み合わせる「４ミラー・システム」などもあります。いずれも、鏡の枚数や組み合わせる角度によって反射の仕方が異なり、それぞれに趣のある模様をつくり出します。（図５・６）

ただし、鏡を組み合わせる角度は何度でもよいというわけではありません。組み合わせる角度は、360 を割るきることのできる数でなければいけません。なおかつ、その商が偶数になる、ということも必要です。商が奇数になるような角度では、反射した模様どうしが重なってしまうからです。

万華鏡の作成では、この対称性をいかに効果的に活用できるかが一つのポイントとなります。より魅力的な世界をつくり出すために、いろいろな工夫がなされているのです。

（山崎浩二）

題材分類	中数１

添付図表

図1　3ミラー･システム

図2　正三角形に組んだものの模様　(右は図柄入りのもの)

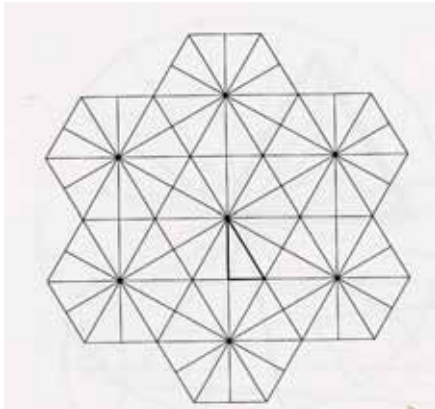



図3　60°と30°の直角三角形に組んだものの模様

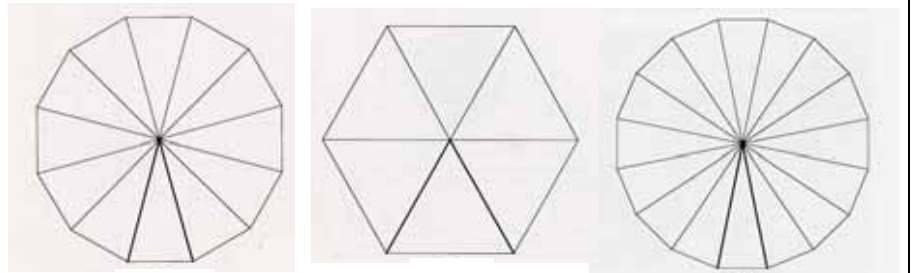



図5　｢2ミラー･システム｣の模様(左から、頂角が30°，60°，22.5°)

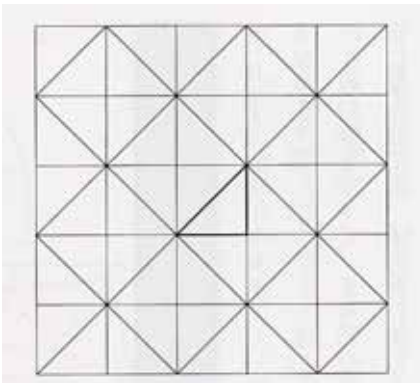



図4　直角二等辺三角形に組んだものの模様

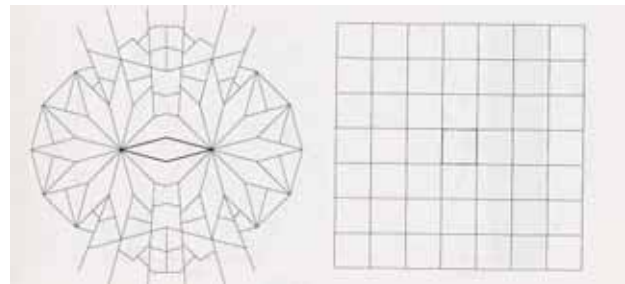



図6　｢4ミラー･システム｣の模様(左から、ひし形、正方形)

出典情報

中村義作（1989）「万華鏡の幾何学」，話題源数学上，p.175　東京法令出版
大熊進一（2000）「万華鏡の本　KAREIDOSCOPE MUSEUM」，pp.17－20　ベアーズ・日本万華鏡博物館
谷克彦（2004）「万華鏡の実験」，数学文化，第３号，pp.53－62　日本評論社

事例シート

題材分類	中数２

題材主題	ミウラ折りはソーラーパネルとして宇宙工学に応用されている。
副題	ジグザグに折り要素を平行四辺形にするだけで形状記憶の折り方ができる。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学２年	Ｂ　図形	（１）基本的な平面図形・平行線の性質		
高校数学基礎	（２）社会生活における数理的な考察	イ　身近な事象の数理的な考察		

学習内容のキーワード	平行四辺形、長方形	活用場面のキーワード	宇宙工学、ソーラーパネル

題材とその活用場面

ミウラ折りとは考案者の三浦公亮（こうりょう）氏の名前に由来があります。氏は東大宇宙航空研究所に在籍のころ宇宙構造物について研究しているときにこの折り方を思いついたというのである．宇宙に打ち上げられたロケットが太陽のエネルギーを利用して飛行するとき、その太陽エネルギーを集める太陽電池のパネルをワンタッチで開閉できる装置を考案しました。これは直線と直線を直角に折るという普通の折り方をジグザグ折りに変更することで可能にしました。図形の知識があればこんな素晴らしいことが可能になるのです。

説明

ここでは図２にしたがってミウラ折りの説明を行います。まずＡ３またはＢ４のコピー用紙を用意します。この紙を縦に５等分，横に７等分になるように折っていきます。縦の５等分は山折り谷折りをくりかえし蛇腹折りのようにします(1)。つぎに横に７等分になるように折っていきますが、折り目をつけるため横方向を７目盛りとしたとき，左から３目盛りの長さを斜めに折り曲げます。斜めの角度は先端が２対１くらいの割合でかなり急な角度をつけておくほうがミウラ折りの効果がつけやすくなります(2)。ジグザグを繰り返して裏側も折ります。ここで用紙を机の上に広げてみます(3)。縦に５等分，横に７等分になっていて、横方向の線は平行で縦方向の線はジグザグと斜めの線になっています。そして最小の要素が平行四辺形になっています。左端の列から縦方向に山折り谷折りをして少しずつ縮めていくとミウラ折りが完成します(4)。完成したミウラ折りの用紙を左下隅と右上隅を指でつまみ，図１のようにワンタッチで開閉できます。

(西山豊)

題材分類	中数２

添付図表

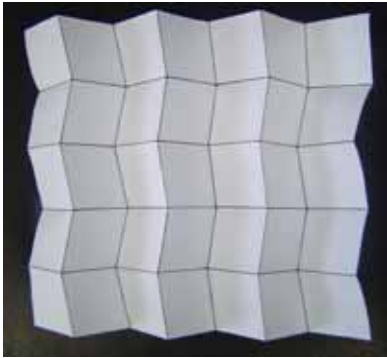



図１．ミウラ折り

図２．ミウラ折りの手順（参考文献(1)）

出典情報

(1)三浦公亮，長友信人(1993)『ソーラーセイル』丸善

(2)西山豊(1995)「“ミウラ折り”を作ってみよう」、数学教室、41 巻 6 号、pp.93-96

題材分類	中数２

題材主題	靴のサイズは万国非共通			
副題	１次関数の利用で、靴サイズが変換できる			
学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学２年	Ｃ　数量関係	（１）一次関数の理解		

学習内容のキーワード	一次関数	活用場面のキーワード	靴の大きさ

題材とその活用場面

靴のサイズは、国によって表示がさまざまです。そこで、外国で靴を買ったり、輸入した外国製の靴を選ぶときなどに困ることがあります。例えば、アメリカやイギリスでは１～１３までの数で表しますが、この数値と実際の長さとの間には、一次関数が隠れています。この一次関数を理解することで、安心して靴を選ぶことができます。

説明

日本では靴の大きさ（長さ）はｃｍの単位で全体の長さを表示しますが、アメリカやイギリスでは１～１３の数で表す独特の方法を用いています。５号とか７号などと表す婦人服のサイズ表示に似ています。

イギリスの表示法では長さ４インチを基準として、$\frac{1}{3}$インチ大きくなりごとにサイズを１，２，３，…と表します。そして１３までいくと、再度１から戻って表示されます。すなわち、長さ８インチ（およそ２０㎝）は、サイズ１２，$8\frac{1}{3}$インチはサイズ１３，そして$8\frac{2}{3}$インチは再びサイズ１ということになります。

この関係を数式で表すと、次のようになります。イギリス表示の靴のサイズをｙとしたときの長さをｘ（インチ）とすると、

$$x = \frac{1}{3}y + 4 \qquad (1 \le y \le 13)$$

$$x = \frac{1}{3}y + 8\frac{1}{3} \qquad (1 \le y \le 13)$$

・・・

ここで長さｘを㎝単位に直して表すには、１インチは約 2.54cm であることを用いればよい。たとえば、長さ 10 インチの靴は約 25.4cm ですが、イギリス式表示ではサイズ５ということになります。

ただし日本で 25cm の靴といえば、その人の足の大きさを意味しますが、イギリス式では靴を作る際の木型の大きさを表します。そこで、実際にはインチ単位を cm 単位に直せばわかるというものではないようです。また、木型ですから靴メーカーによってかなり差があります。やはり、靴は履いて試して買うのが良いようです。（婦人靴は、上記紳士靴の基準をアレンジして別に作られています）

（石田唯之）

題材分類	中数２

添付図表

出典情報

題材分類	中数２

題材主題	建物に筋交いをなぜ入れるのか
副題	合同条件の建築への応用

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学２年	Ｂ　図形	（２）平面図形の性質と三角形の合同条件	イ　三角形の合同条件の理解	

学習内容のキーワード	合同、三角形の合同条件	活用場面のキーワード	建物の補強、筋交い

題材とその活用場面

木造で建築中の建物があったら、観察してみてください。必ず、長方形の部分に斜めの柱を入れます。これを「筋交い」といいます。長方形の部分に筋交いを入れるのは、長方形を三角形に分けて、動かないようにするためです。これは、三角形の合同条件を利用しているのです。合同条件の学習は、建築にも使われているのです。

説明

ある図形を倍率を変えないでコピーしてできた図形と、それを移動させたり、回転させたり、裏返ししてできた図形は元の図形に**合同**であるといいます(図１)。

特に、三角形については、条件を絞ることができます。2 つの三角形△ABC と△DEF について、△ABC≡△DEF であるための 3 つの条件は、

① **３辺がそれぞれ等しい**　たとえば図２で　AB＝DE、BC＝EF、CA＝FD　。

② **2 辺とはさむ角がそれぞれ等しい**　たとえば図３で、AB＝DE、BC＝EF で、∠B＝∠E のとき。

③ **１辺と両端の角がそれぞれ等しい。**たとえば図４で、ＢＣ＝ＥＦ，∠B＝∠E、∠C＝∠F のとき。

合同条件の①によって、３辺がそれぞれ等しい三角形が合同ですから、三角形では、３辺の長さが決まれば図形は１個だけに決まります。ところが、四角形では、そうはいきません。4 つの辺を決めて、４頂点でつないだものは、動いていろいろな形の四角形に変形できます（図１左端）。

建物を補強する筋交いも、このままだと動きやすい長方形の枠組みを、三角形に分割して動きようのない形にしたものです。

（星野千春）

題材分類	中数２

添付図表

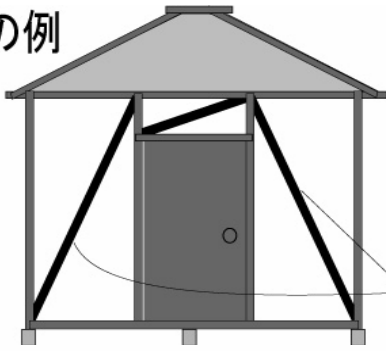
筋交いの例

筋交いで長方形を三角形に変えて、強度を上げる。

図１

合同

図２
合同の条件１

図３
合同の条件２

図４
合同の条件３

出典情報

事例シート

題材分類	中数２

題材主題	同じ形で平面を埋める
副題	サッカーボールはなぜ六角形と五角形か

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学２年	B　図形	（１）平面図形･平行線の性質	イ　多角形の角の性質	発展的学習
小学算数５年	C　図形	（１）基本的な平面図形	イ　平行四辺形、台形、ひし形	

学習内容のキーワード	図形の球面充填、正多角形の内角	活用場面のキーワード	ドーム屋根の設計 敷きつめ問題

S題材とその活用場面

同じ形の正多角形で平面を埋めよという問題の解は、正三角形、正方形、正六角形です。これ自身では現実性はあまり実感されませんが、ドームの屋根や、サッカーボールを作ろう・設計しようとするとき、現実味を帯びてきます。例えば、正六角形の板だけを準備したのでは、サッカーボールは作れません。

説明

簡単なことですが、正六角形の内角は１２０度です。ですから、これが三個集まるとき、その内角は、３×１２０度＝３６０度となって、平面になってしまいます。これでは内側にも外側にも曲がれません。もちろん、内角１２０度の正六角形２個と内角１０２度の正五角形一個を混ぜると、内角の和は、

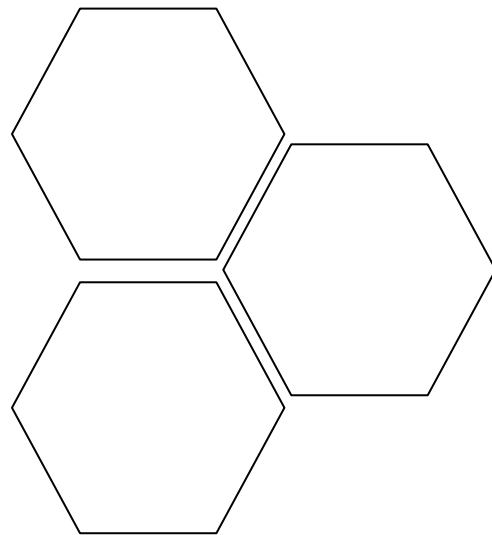
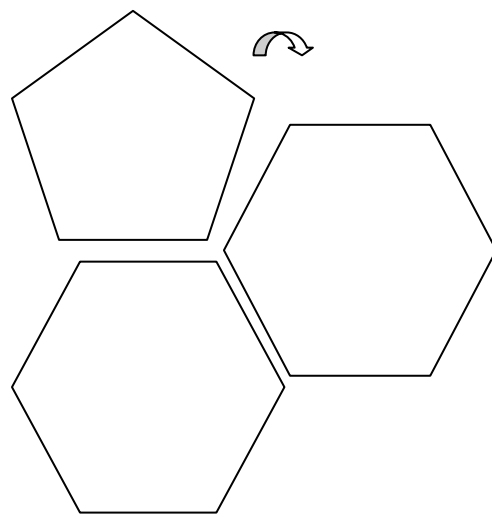
１２０度＋１２０度＋１０２度＝３４２度

になります。これで内側に曲がることができて、サッカーボール、ないしノーベル賞のフラーレン（C60）が作れることになります。

これを忘れて、六角形の板だけを用意して、無理にドームを作ってしまって、雨漏りに泣いたという笑えぬ悲劇が実際にもどこかで起こったという話です。

（四方義啓）

題材分類	中数２

添付図表

正六角の板は、ぴったり重なって平面を作る

ぴったりしない隙間を埋めると、立体ができる
→サッカーボールなど

出典情報

事例シート

題材分類	中数２

題材主題	連立方程式をどう立てるか
副題	連立方程式はＣＴスキャンの原理、うまく立てると被爆量が減る

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学２年	Ａ　数と式	（２）連立二元一次方程式の理解と利用		発展的学習
高校数学Ｃ	（１）行列	（１）行列との応用	（ア）連立一次方程式	

学習内容のキーワード	連立方程式	活用場面のキーワード	ＣＴスキャン

題材とその活用場面

連立方程式を学習するにあたって、方程式の解が不定・不能となる場合を考慮する必然性や有効な方程式を連立させる必要性は理解されにくい。このようなとき、連立方程式の手法が CT スキャンなど医療応用の中に生きていることを知らせることは有効です。例えば、ｘ＋ｙ＝ａ、ｕ＋ｖ＝ｂ、ｘ＋ｕ＝ｃ、ｖ＋ｙ＝ｄ　について、変数ｘ，ｙ，ｕ，ｖを下図のように配置し、Ｘ線を真横から、または真上から照射すれば、各方程式は影の濃さをあらわします。影は、病変があれば濃いので（フィルム像は逆）、この方程式を解いて得た答えを図上に表示すれば病変が見えます。これがＣＴスキャンの原理です。

説明

CT スキャンなど医学的応用においては、多くの場合、ｘ、ｙ、・・などは、単なる変数ではなく、「どの位置がどれくらいの濃さなのか」という位置情報をあわせもった変数へ移行していることに注意します。下図でいうとｘは左前葉部、ｙは右前葉部・・の病変の程度をあらわします。
Ｘ線を真横または真上から照射すると、それによって生じる影の濃さは
真横から照射した場合：ｘ＋ｙ＝上半の影の濃さ、ｕ＋ｖ＝下半の影の濃さ
真上から照射した場合：ｘ＋ｕ＝左半の影の濃さ、ｙ＋ｖ＝右半の影の濃さ
となり、上記の方程式であらわらされます。しかし、これらの方程式は、独立ではない（解が不定・不能・ランクが下がっている）ので、三つの変数が求まるだけで、効率的ではありません。（例えばｘ＋ｙ＝１、ｕ＋ｖ＝０、ｘ＋ｕ＝１、ｙ＋ｖ＝０　というｘ，ｙ，ｕ，ｖの連立方程式など）。
そこで例えば斜め上から照射することにすれば（下図参照）、これは、それぞれ　ｕ、ｘ＋ｖ、ｙ　の値を与えることになり、真横からの照射による　ｘ＋ｙ　とｕ＋ｖ　の値とあわせて、二回の照射で四つの変数のすべてが求められ、どの部分の病変がどうであるかが分かります。ＣＴスキャンはこうして得られます。これがＣＴスキャンが回転し、そのデータを計算するコンピュータを内蔵させている理由です。
実際には、人体を細かい部分に区切って、それだけ多くの変数を考え、多くの方程式を連立させます。このさい、できるだけ照射回数を減らすこと、すなわち連立方程式をうまく立てることが重要になります。
なお、現実的には、雑音などを平均化によって処理します。また、これを無限に細かくした場合は、数学ではフーリエ変換と呼ばれます。

（四方義啓）

事例シート

題材分類	中数２

添付図表

出典情報

題材分類	中数３

題材主題	２乗に比例する数
副題	カーブを曲がる車への遠心力

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学３年	C　数量関係	（１）関数　$y = ax^2$ の理解		

学習内容のキーワード	遠心力 ２乗に比例するもの	活用場面のキーワード	安全運転

題材とその活用場面

車がカーブを曲がるとき、速度の２乗に比例する大きさの遠心力が働いて車は外へ飛び出す力をうけます。速度の２乗に比例する大きさの力ですから、速度がちょっと大きくなると遠心力は急激に増大し、交通事故につながります。遠心力を学ぶことは交通安全にもつながっているのです。

車の中には自転車やバイクが含まれるのは当然ですが、走っている人にも曲がろうとするときには遠心力が働きます。カーブした坂道を駆け下り、スピードがつきすぎて曲がりきれなくなってしまいそうになった経験はありませんか。

説明

山道などの急カーブは、スピードを出しすぎると曲がりきれなくて事故になることがあります。急カーブを曲がるときはただハンドルを切ればよいというわけではありません。

カーブは部分的には円周の一部分とみなすことが出来ます。円の半径を　R　とすると、速度　V　でそのカーブを曲がろうとするときには、外に飛び出す方向の遠心力が働きます。その大きさは車の質量を　M　とすると、MV^2/R　となることが知られています。遠心力はどんなにゆっくり回っても発生するのですが、タイヤと道路との摩擦力が働くので、通常の車は外に飛び出すことなくカーブを回っています。

この式からわかるように遠心力は速さ　V　の２乗に比例します。スピードが上がるとその力は非常に大きくなり、カーブを曲がる車のタイヤが道路を滑って「キキーー！」と大きな音を立てることもあります。音が出るくらい滑っても道路の上にとどまっていられるのならば問題にはなりませんが、速度の２乗に比例しますから、タイヤの音が出る速度を少し超えるスピードになると遠心力は大変大きくなり、ついには道路の外に飛び出してしまいます。　自転車に乗り始めて間もない子供が急な坂道を下って、スピードがですぎ、曲がりきれなくて転倒するという光景を見かけることもあります。

遠心力という力（MV^2/R）　の大きさは、（質量・距離　÷　時間^2　）で表される単位になり、通常は質量Mはｋｇ、速さVは　ｍ／秒、半径R　はｍで　ｋｇ・ｍ　/　秒^2　で表されます。

（鈴木俊夫）

題材分類	中数３

添付図表

図１　カーブの道路標示

図２　速度制限の道路標識

図３　速度と遠心力の方向

出典情報

題材分類	中数３

題材主題	コピー倍率の数字が意味するものは？
副題	オフィス機器に入り込んでいる無理数

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学３年	A　数と式	（１）平方根		
中学数学３年	B　図形	（１） 相似 （２） 三平方の定理	ア　相似	
高校数学 I	（１）方程式と不等式	ア　数と式		

学習内容のキーワード	平方根　無理数　二次方程式 相似　三平方の定理	活用場面のキーワード	コピー倍率　A 判・B 判の紙

題材とその活用場面

コピー機を使って、拡大や縮小をするときに、指定倍率を活用することがあります。そのときの倍率の中には、81%，86%，115%，122%といった半端な数字が使われています。この数字の意味には、無理数や二次方程式、相似の内容などが深くかかわっています。

無理数や相似などの学習内容は、オフィスなどで使われるコピー機の倍率表示にも活用されています。

説明

コピー用紙に用いられている長方形は、「半分に何度折っても、縦と横のそれぞれの長さの比が同じ」という特徴をもっています。このような図形は、自己相似形とよばれています。

この長方形の縦と横の長さの比は、次のようにして求めることができます。縦の長さ（AB の長さ）を１，横の長さ（AD の長さ）を x とすると、半分にしても相似比が同じであることから、①の式が成り立ちます。（図１）①の式から、②の二次方程式ができます。

$$1 : x = \frac{1}{2}x : 1 \quad \cdots \quad ① \qquad \frac{1}{2}x^2 = 1 \quad \cdots \quad ②$$

これを解くと、$x = \sqrt{2}$ となり、縦と横の長さの比は１：$\sqrt{2}$ となります。コピー用紙などの紙は、すべてこの比でできています。この１：$\sqrt{2}$ の比は、「白銀比」ともよばれています。

コピー用紙などの紙の規格には、A系列とB系列の２種類があります。いわゆるA判、B判とよばれるものです。A系列はドイツで生まれ国際規格となったものです。それに対して、B系列は日本で昔使われていた「美濃紙」といわれるものを参考にして作られたものです。

A系列の中でいちばん大きなサイズは A0 判といい、面積がちょうど１m^2になるように作られています。裁断による紙の無駄をなくすために、A0 判の面積の半分のサイズが A1 判となります。その半分が A2 判、その半分が A3 判･･･、というように数字が小さくなるにつれて、紙のサイズが小さくなります。一方、B系列はそれぞれの同じ番号のA系列の面積の 1.5 倍になっています。だから、判の数字が同じものどうしならば、A 判の紙の対角線がB判の紙の一辺になります。（図２）教科書や文庫本、ポスターやカタログ、雑誌などの紙も A 判や B 判が使われています。（図３）

以上のことから、三平方の定理などを活用して、コピー倍率を計算してみることにします。

たとえば、B5 判から B4 判の大きさに拡大するときは、縦、横の長さとも $\sqrt{2}$ 倍すればよいので 1.41 倍、つまり 141%となります。また、A４判から B4 判の大きさに拡大するときには $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 倍で、1.22 倍（122%）となります。B5 判から A4 判への拡大は $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 倍で、1.15 倍（115%）とすればよいわけです。縮小については、拡大のときの倍率のそれぞれ逆数を考えればよいことになります。（図４）

（山崎浩二）

題材分類	中数３

添付図表

図1

図2　A判と対角線とB判の辺の長さとの関係

判型	サイズ(mm)	主な用途
A0	841×1189	
A1	594× 841	ポスターなど
A2	420× 594	〃
A3	297× 420	〃
A4	210× 297	楽譜･電話帳など
A5	148× 210	書籍、雑誌、教科書
A6	105× 148	文庫本など
A7	74× 105	ポケット辞書など
B0	1030×1456	
B1	728×1030	ポスターなど
B2	515× 728	〃
B3	364× 515	車内吊り広告など
B4	257× 364	グラフ誌など
B5	182× 257	雑誌、カタログ、地図帳
B6	128× 182	書籍
B7	91× 128	手帳

図3　A判とB判のサイズと主な用途

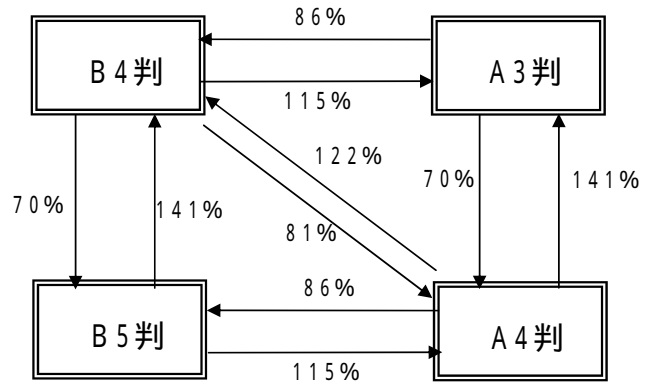
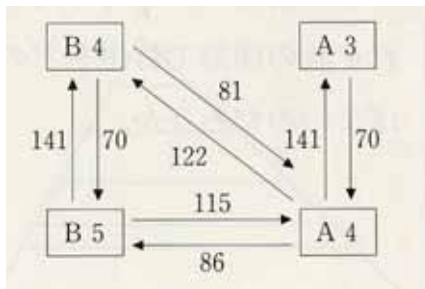



図4　A判，B判と倍率との関係

判型	サイズ(mm)	主な用途
A0判	841×1189	
A1判	594× 841	ポスターなど
A2判	420× 594	〃
A3判	297× 420	〃
A4判	210× 297	楽譜，電話帳など
A5判	148× 210	書籍，雑誌，教科書など
A6判	105× 148	文庫本など
A7判	74× 105	ポケット辞書など
A8判	52× 74	
B0判	1030×1456	
B1判	728×1030	ポスターなど
B2判	515× 728	〃
B3判	364× 515	車内吊りポスターなど
B4判	257× 364	グラフ誌など
B5判	182× 257	雑誌，カタログ，地図帳など
B6判	128× 182	書籍
B7判	91× 128	手帳
B8判	64× 91	

出典情報

事例シート

題材分類	中数３

題材主題	バーゲンセールの５割引は本当にお得？
副題	生活の中で、文字を使って数学的に判断をする

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学３年	Ａ　数と式	（２）文字式		
高校数学基礎	（２）社会生活における数理的な考察	ア　社会生活と数学		
高校数学Ｉ	（１）方程式と不等式	イ　一次不等式		

学習内容のキーワード	文字の使用 不等式	活用場面のキーワード	日常場面、割り引き率、文字を利用、

題材とその活用場面

あるお店のバーゲンセールでセーターが５割引で売られています。さて、本当に得なのでしょうか？お店の利益はあるのでしょうか？もちろんお店が損を出して売ることはないでしょうから、正価で買うより得に決まっていますが、そのからくりはどうなっているのでしょう。文字を使って考えることにより、割引の意味がわかります。お店の方も損をしないように、この式を使って売値を決めているのですね。このように、文字式や不等式の学習が生活の中での判断に活用されています。

説明

セーターの仕入れ値を仮にA円としてみましょう。

A円にa%の利益を見込んだ売値は$A\left(1+\frac{a}{100}\right)$円になります

バーゲンセールで売値のb%引きで売ろうとしたとき、売値は

$$A\left(1+\frac{a}{100}\right)\times\frac{(100-b)}{100}=\frac{A(100+a)(100-b)}{10000}\text{円}$$

となります。お店は損をしないように、A円以上で売っているわけですから、次の式ができます。

$$\frac{A(100+a)(100-b)}{10000}\geqq A$$

100% 引きということはありませんから、$100-b>0$となり、

この式を変形していくと。

$$a\geqq\frac{100b}{100-b}$$ …①になります。

５割引ということは、$b=50$ですから、これを①に代入すると、$a\geqq 100$となり、100% 以上の利益をつけている、つまり売値は仕入れ値の２倍以上の価格がついていたということがわかります。お店の方も損をしないように、品物を多く売って利益をあげたいわけですから、お客さんの購買意欲と、この不等式とを天秤にかけて売値を決定しているようです。このように、日常場面に文字を使うと、数学的に判断することができるのです。

（八田弘恵）

事例シート

題材分類	中数３

添付図表

仕入れ値
値札の価格
売値
値引き
利益
5割引

当社平常価格の
50% OFF

出典情報

関根　鴻（１９９４）「知って得する生活数学」ｐｐ27-30 ブルーバックス

事例シート

題材分類	中数３

題材主題	フラクタルによる交通網の評価
副題	自分の街の地下鉄やバスがうまく隅々まで行き渡っているか考えよう。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
中学数学３年	Ｂ　図形	（１）相似	ウ　相似の考えの活用	
高校数学Ⅱ	（３）いろいろな関数	イ　指数関数と対数関数	（ウ）対数関数	

学習内容のキーワード	相似、対数関数、指数関数、フラクタル	活用場面のキーワード	都市交通の評価、住宅設計の動線

題材とその活用場面

都市計画や住宅設計などにかかわるときに、交通網や主婦の動線が偏ってないかを判断するために、その基準があれば大変便利です。このときに、相似形を一般化した「フラクタル」という考え方が役に立っています。さらに、そのフラクタル量を決めるときに、指数関数・対数関数が使われます。

説明

コッホ図形の一部分を拡大すると、同じ図形が出てきます。このように一部を拡大すると、元の図形に似た図形になるとき、この図形をフラクタル図形といいます。

ｒ次元の図形を３倍に相似拡大したら、量は3^r倍になります。しかし、コッホ図形では長さが４倍になりますから、次元は$3^r=4$を解いて、ｒ＝1.26 と考えられます。

線の図形は、平面を覆い尽くすように複雑に入り組めば、フラクタル次元が２に近くなります。このことから、線図形が平面を覆っている割合をフラクタルの意味の次元を用いて算出することができます。たとえば写真のナイル川の蛇行は 1.4 次元、アマゾン川の蛇行は 1.85 次元と計算され、アマゾン川の方が流域の隅々を覆っていることがわかります。

この考え方は、都市交通や住宅設計などにも用いることができます。

この場合、小山徹氏らによって紹介されたフラクタル次元の簡便な計算法を使うと便利です。

都市交通の疎密さを算定する時には、都市の形も考慮しなければなりませんから、

交通網のフラクタル次元／都市のフラクタル次元

の値を求めます。小山氏らは、この計算で、たとえば、長崎市の路面電車が、0.66 京都市の路面電車が 0.79 で、京都市の路面電車のほうが市内を密に運行しているということを示しました。

（岡部恒治）

題材分類	中数３

添付図表

コッホ図形

小山氏らのフラクタル次元の計算法：

考えている図形が入っている平面を１辺ｒの正方形の格子に分割し、その図形が含まれる正方形の数を数えます。これを N(r)とします。このｒを変えたときに、ｒと N(r)が、適当な係数ｋを用いて、

$N(r) = k \cdot r^{-D}$

と表されるとき、フラクタル次元はＤといいます。

出典情報

小山徹、藤井憲男 (2000 年) 「交通網とフラクタル」『AERA Mook　数学がわかる』，pp.106-109，朝日新聞社

題材分類	中数３

題材主題	外国為替に強くなる
副題	乗法公式の利用で、概数の計算が暗算できる

学習指導要領の教科・科目	**学習指導要領の大項目**	**学習指導要領の中項目**	**学習指導要領の小項目**	**備考**
中学数学３年	Ａ　数と式	（２）多項式の展開と因数分解		

学習内容のキーワード	乗法公式 概数	**活用場面のキーワード**	外国為替

題材とその活用場面

外貨に両替するときなど、受け取った金額が正しいか否か、疑問に思うことがあります。外為窓口でのことなので、電卓で計算する余裕はありません。このようなとき、乗法の公式を利用すれば、概数の計算が暗算で行うことができ、たいへん便利です。

説明

小学校では、ある数を 25 でわる割り算は、４倍してから 100 でわればよいことを学習しています。例えば、215÷25 は、215 の４倍、すなわち２倍の２倍、860 を 100 でわって、8.6 ということが暗算で求められます。

一方、中学３年では、乗法公式として、$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　を学んでいます。

このような計算のきまりを知っていると、外国為替の場面などに役立つことがあります。

（例１）１ドル＝110 円のとき、50000 円を両替すると何ドルになるかは、

$50000 \div 110$ と計算しますが、これを暗算で求めることは簡単ではありません。ところが、

$1.1 \times 0.909 = 0.9999 \approx 1.0$ を知っていれば、$1.1 = \dfrac{1.0}{0.909}$ として扱うことができます。すなわち、

$$50000(yen) = \frac{50000}{110} = \frac{50000}{100 \times \dfrac{1.0}{0.909}} = \frac{50000}{100} \times 0.909 = 454.5(USD)$$

と即座に求められます。

また、これを知らなくても、$1.1 \times 0.9 = 0.99$ であり、$1 - 0.99 = 0.01$ は１に対してちょうど１％なので、

$$50000(yen) = (\frac{50000}{100} \times 0.9) = 450$$

これに１％を加えて、454.5（USD）として得ることもできます。

（例２）また、１ポンド＝196 円のとき、60000 円を両替するとき、

$196 \times 204 = 200^2 - 4^2$ ＝40000－16

ここで、16 は 40000 の 0.1％未満であることがわかります。

したがって、

$$60000(yen) = \frac{60000}{40000} \times 204 = 1.5 \times 204 = 306$$（英ポンド）

として計算することができます。（誤差は 0.1％すなわち 0.3 ポンド未満）

（石田唯之）

題材分類	中数３

添付図表

出典情報

事例シート

題材分類	中数３

題材主題	電子マネーには素因数分解!
副題	キャッシュカードやインターネットで使われる暗号を支えている素数や素因数分解

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
数学中学３年	A　数と式	（２）文字式		

学習内容のキーワード	素数　素因数分解	活用場面のキーワード	公開鍵暗号システム RSA 暗号

題材とその活用場面

銀行のキャッシュカードやインターネットでの買い物（いわゆる電子マネー）は、簡単にお金の出し入れや取引きができるという点で、たいへん便利なものです。

このシステムには、他人に悪用されないために RSA 暗号とよばれる公開鍵暗号システムが使われています。これは、カード番号等を暗号化する鍵とそれを解読するための鍵といった、２種類の暗号を用いるシステムです。この暗号をつくり出す過程では、素数や素因数分解が使われています。

素数や素因数分解は、現代社会の電子マネー取引きを支えているのです。

説明

暗号とは、情報交換をする者どうしが、他の者に解読できないように、普通の文字や記号を一定の約束のもとに他の文字や記号に置き換えたものです。RSA 暗号では、この「約束」をつくり出す際に素数を用いています。コンピュータは、与えられた式を計算して答えを出すことは得意ですが（①）、逆にある数を素数の積の形にする、つまり素因数分解する（②）には時間がかかり、もとの数の桁数が多くなると事実上不可能となります。

$$1000000019\times700000000009 \underset{②}{\overset{①}{\rightleftarrows}} 700000013390000000171$$

RSA 暗号はこの特徴を利用したシステムです。

（１）　まず２つの素数ｐ，ｑを決め、その積をｎとします。
　　（例：ｐ＝5　ｑ＝11 とするならば、ｎ＝55 になります）

（２）　（ｐ－１）（ｑ－１）を求め、その積を素因数分解します。
　　（例：（５－１）（11－１）＝40　$40=2^3\times5$）

（３）（ｐ－１）（ｑ－１）と互いに素となる数ｎを選びます。
　　（例では、２か５で割り切れない数を選べばよいことになります。ここではａ＝７とします）

（４）　ａ×ｂ＝（ｐ－１）（ｑ－１）×ｃ＋１となるような数ｂを選びます。
　　（例：７×ｂ＝40×ｃ＋１を満たすｂは 23 となります）

（５）　暗号は次の「約束」でつくられます。「すべての数字はａ乗してｎで割った余りに置き換えます」
　　（例：４は、暗号では　4^7÷（５×11）＝297 余り 49 となり、49 になります）

RSA 暗号では、暗号化する過程で２種類の鍵があります。一つは「公開鍵」とよばれ、例では 55（＝ｎ）と７（＝ａ）がそれにあたります。これは、クレジット番号やカード番号などを暗号化する際に使われ、一般的には誰でも知ることができます。もう一つは「秘密鍵」とよばれ、例では 23（＝ｂ）がそれにあたります。これは、暗号を解読するために使うもので、使用する本人だけが知るものです。

暗号を解読するには、ｎがどのように素因数分解できるかがわからないとできません。ｎが 55 のような小さい数ならば５×11 と簡単にできますが、RSA 暗号ではたいてい 200 桁程度の数が使われます。この数を素因数分解することは今のところコンピュータでは不可能です。つまり、「公開鍵」を知っていても解読できないのです。しかし、「秘密鍵」にあたるｂを使えば、簡単に暗号を解読することができてしまいます。「暗号化された数をｂ乗してｎで割った余り」がもとの数になります。つまり、49 を 23 乗して 55 で割ったと余りは４になるのです。

RSA 暗号は、暗号化した文章を「秘密鍵」をもつ者だけが読むことができる、というシステムを可能にしています。その背景には大きな数の素因数分解があるというわけです。インターネットでの買い物などで使われる電子マネーはこのシステムが採用されています。だから「秘密鍵」は他人に知られないように管理しなければならないわけです。

（山崎浩二）

事例シート

題材分類	中数３

添付図表

図1　銀行の現金自動支払機　　　　**図2　銀行のキャッシュカード**

出典情報

吉田武（2001）「はじめまして数学１」，pp.152－159　幻冬舎
小島寛之（2003）「数学の遺伝子」，pp.49－54　日本実業出版社
アスキーデジタル用語辞典　2004 年 10 月 7 日以下より検索,
URL:http://yougo.ascii24.com/gh/20/002012.html

事例シート

題材分類	小算５

題材主題	しきつめの美
副題	合同な図形を使ってしきつめた芸術作品（エッシャーの作品）

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	C　図形	（１）基本的な平面図形	イ　平行四辺形、台形、ひし形	
中学数学２年	B　図形	（１）基本的な平面図形の性質	イ　多角形の角についての性質	

学習内容のキーワード	しきつめ	活用場面のキーワード	多角形のしきつめ　芸術作品

題材とその活用場面

多角形のしきつめをもとにいろいろな図形で平面をしきつめることができます。例えば、正方形でしきつめたタイルはよく見かけますが、その正方形を変形するといろいろなしきつめができます。エッシャーは、しきつめをアイデアにしてさまざまな作品を見事に芸術作品にまで仕上げた人のひとりです。このように、多角形のしきつめのアイデアは芸術の世界にも活用されています。

説明

同じ大きさの正方形ならば、平面をすきまなくおおうことができます。また、同じ大きさの正三角形や正六角形も同様です。（図１～図３）正三角形の１つの角は 60°だから、６つでちょうど 360°になるからです。正六角形も１つの角が 120°だからで、３つでちょうど 360°になります。正六角形で埋め尽くされているものといえば蜂の巣がありますね。正五角形などの他の正多角形ではちょうど 360°になることはなく、すきまができるので、正三角形、正方形、正六角形以外の正多角形一種類だけで平面をうめつくことはできません。

正多角形以外の図形で平面をしきつめることのできるものには、長方形や平行四辺形があります。どんな形の三角形でも、合同な三角形を図４のように、２つ並べると平行四辺形になるので、１種類で平面をしきつめることができます。

では、四角形はどうでしょうか？四角形の内角の和は 360°ですから、合同な四角形ならば、図５のように組み合わせると、１つの平面を１種類の四角形でしきつめることができます。このように三角形と四角形はどんな形でも一種類で平面をしきつめることができることがわかります。また、図６のような六角形でも平面をしきつめることができます。

このしきつめられた図形を変化させて芸術作品にしたのがエッシャーという人です。彼の作品の「メタモルフォーゼ」の中に作品１・２は入っています。作品１はしきつめられた四角形が魚から鳥に変化していきます。作品２はしきつめられた六角形の中にワニが同じ形で入っています。不思議な魅力を秘めた作品ですね。このように数学は芸術作品の中にもうまく利用されています。

（八田弘恵）

題材分類	小算５

添付図表

図１

図２

図３

図４

図５

図６

エッシャーの作品

作品１

作品２

作品３

出典情報

教科書　「高校数学Ａ」　実教出版　岡本和夫著

題材分類	小算５

題材主題	マンホールのふたはなぜ丸い？
副題	マンホールのふたはほとんど円形である算数的秘密をさぐる。

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	Ｃ　図形	（１）基本的な平面図形	ウ　図形の性質	円、四角形

学習内容のキーワード	正方形、辺、対角線、円、直径、差し渡しの距離、	活用場面のキーワード	ふたの形、落ちないふた、マンホールのふた、ドリルの刃

題材とその活用場面

町を歩いていると、車や人通りの多い道路に円形のマンホールのふたが多いことに気づく。そこには、ふたが落ちない算数的な意味がある。形の中心を通る、「差し渡しの距離」によって、ふたが落ちるか落ちないかが決まってくる。円の差し渡しの距離が、「すべて直径で、同じ長さであること」が、落下防止になっている。このように、円の差し渡しの距離が同じである性質が、マンホールなど「落ちないふた」に活用されている。

説明

なにげなく見ているマンホールのふた、この何でもない形にも、実は算数的な秘密がかくされている。マンホールのふたの形は、通りの多い道路ではほとんどが円である。正方形や長方形のふたもあることはあるが、それは、あまり通りが多くない場所で使われている。では、交通量が多い場所では、なぜ、円形のふたが多いのだろう。それは、ふたの落下防止と関係がある。車が多い通りや地震や台風でマンホールのふたがはずれる危険性は大きい。この、「ふたがはずれて落ちる」ということは、図形的にはどういうことかというと、それは、その形の「差し渡しの距離」と関係している。もし、ふたが正方形や長方形だと、図１のように、差し渡しの距離の違いでふたは落ちてしまう。つまり、「穴の最大の差し渡しの距離」が、「マンホールのふたの差し渡しの距離」より長くなるときに、ふたは落下する（図２）。円のふたでは、この差し渡しの距離が、穴も形もいつも直径で同じになっているので（図３）、落ちないのである（図４）。円と同じような落ちない形が他にないかどうかさがしてみると、図５のような、中心角６０°の扇形が組み合わさった「ルーローの三角形」がそうであることがわかる。

（有田八州穂）

題材分類	小算５

添付図表

図１

図２
（正方形のふたのとき）

図３

図４
（円のふたのとき）

図５

出典情報

中村義作（1999）『数学がおもしろくなる本』pp. 102-105, 三笠書房　本文では、ふただけでなく、「ルーローの三角形」を利用した、正方形の穴を削り出せるドリルの刃についてもふれている。

題材分類	小算５

題材主題	円周の長さは直径かける３．１４
副題	風力発電の機械の大きさ　＋　ドン･キホーテと風車の戦い

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	Ｃ　図形	（１）基本的な平面図形	エ　円周率の意味	

学習内容のキーワード	円周の長さ　円周上を動くもの	活用場面のキーワード	身の回りの円の形のもの 身の回りの円運動するもの

題材とその活用場面

円周＝直径×３．１４　という計算式は、算数の時間では出てきますが、普段の生活の中でも一寸気をつけてみるといろいろな場面でお目にかかり、それにいろいろな単位をつけて実際の意味を考えると楽しいことに気がついたり、危険を避けることが出来たりします。風力発電の巨大な風車はゆっくり回っているように見えますが、実際にはすごいスピードで回っています。音速を超える速度になったりするといろいろな支障が出てきますから、スピードが出過ぎないように抑える配慮が必要です。また、のんびりしているように見えるオランダの風車も実際には相当なパワーとスピードを持ち、人間が素手で立ち向かったら吹っ飛ばされても不思議ではありません。　3.14（円周率）の学習から、身の回りの”円”の様子が新鮮になってきます。

説明

現在のところ日本で最大の風車は、静岡県竜洋町にあるもので、翼の長さは 40m、回転の中心の位置は地上 60mにあります。穏やかな天候のときに遠くから眺めると、海の動きにあわせるかのようにゆったりと回転しています。３本の翼が２秒毎くらいに最も高い位置に現れる様子からは、優雅な日本舞踊を連想させられます。でも３本が２秒毎に現れるということは６秒で１周しているということです。そうすると翼の先端部分は秒速 41.9m（＝40×２×3.14÷６）の速さで動いていることになります。時速にしたら毎時 150km 以上ですから、本当はのんびりと動いているというのとは程遠い動きをしています。もし風の吹くままに回転させていたらどうなるでしょう。翼の先端の速さが常温での音の速さ 340mになるとき毎秒ｘ回転するとすると 40×２×3.14 ｘ＝340 という式が成り立ちます。（ｘ＝1.35）風力発電の場合では、翼の一部が音速を超える速さで回ったりすると、さまざまな悪影響が出ますから、この回転数よりもはるかに低いところに回転数を抑えるようにしなければなりません。

これほど巨大なものでなく、ドンキホーテが怪物と思い込んで戦ったスペインの風車はどうでしょうか。この風車もかなり大きく、翼の長さは 10mくらいあります。回転したときの直径にすると 20mですから、10 秒で１回転するくらいのゆっくりした動きをしていても、翼の先端は毎秒６ｍ以上の速さで動きます。時速にすると 20km/時ですから、一寸スピードがある自転車くらいです。翼の重さは数十 kg はありそうですから、ドンキホーテは” 自転車の速さで動く、人間の重さの 4 本の腕が打ちかかってくる怪物”と戦ったことになります。１つくらいは何とかなるかもしれませんが、４本の手では到底かないそうにありません。

直径かける 3.14 が円周の長さという計算をしてみると、本当はどうだったかをこんな風に実感できます。

（鈴木俊夫）

題材分類	小算５

添付図表

静岡県竜洋町の風力発電機　と　その大きさなどの解説

スペインの風車

出典情報

事例シート

題材分類	小算５

題材主題	四角形で模様づくり
副題	敷き詰めやデザインに活用される四角形の性質

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	C　図形	（１）基本的な平面図形	イ　平行四辺形、台形、ひし形	
中学数学２年	B　図形	（１）基本的な平面図形の性質		

学習内容のキーワード	四角形の内角の和　　外角の和	活用場面のキーワード	模様づくり　　敷き詰め　　デザイン　テセレーション

題材とその活用場面

図柄や模様の中には、いわゆる「敷き詰め」といわれる、単位となる図形で平面を埋め尽くされているものがあります。この単位となる図形は、実は三角形や四角形といった、比較的簡単な図形が用いられていることが多いのです。特に四角形は、どんな形のものでも、それを使って平面を敷き詰めることができます。

図形の特徴を観察したり、その性質を明らかにしたりしていく学習は、幾何学的な模様づくりやデザインの分野にも活用されています。

説明

正方形や長方形、平行四辺形などに限らず、四角形であれば、必ず平面を敷き詰めることができます。

これは、四角形の内角の和が 360° であること、四角形の各辺の中点どうしを結ぶ線で４つのパーツに分け、これらを組み合わせると必ず平行四辺形ができること、などから説明できます。（図１・２）

それゆえに、身の回りの図柄や模様には、四角形を基本としたものをよく目にすることができます。

例えば、壁紙の模様や床のタイル、さらにはネクタイや千代紙などの図柄や文様などには、その類が数多くあります。注意して見てみると、基本となっている模様を見つけることもできます。（図３）

逆に、四角形をもとにしたデザインで、模様づくりをすることもできます。

たとえば、長方形にいくつかの図形を加えます。これを基本の図柄として、縦、横に次々とならべていくと、同じ図柄による敷き詰め模様をつくることができます。（図４）これは、一般の四角形でも可能です。同様にして、基本の図柄をつくると、ならべ方は長方形のときと多少異なりますが、やはり敷き詰め模様ができます。（図５）

このような敷き詰めによる模様づくりには、テセレーションとよばれるものがあります。これは、いくつかの図柄をすき間なく敷き詰めて、連続したパターン模様をつくることです。テセレーションとして有名なものの一つに、エッシャーによる作品があります。エッシャーの作品には、いろいろな敷き詰めのパターンが見られますが、基本となる図柄にはやはり四角形などの簡単な図形をもとにしたものが多く使われています。（図６）

ふだん目にする図柄やデザインが、どのような模様や図形で構成されているのかを観察してみると、図柄の美しさもひと味違ったものとなりそうですね。

（山崎浩二）

事例シート

題材分類	小算５

添付図表

図１

図２

図３　床タイルの模様例

図４　長方形をもとにした模様づくり

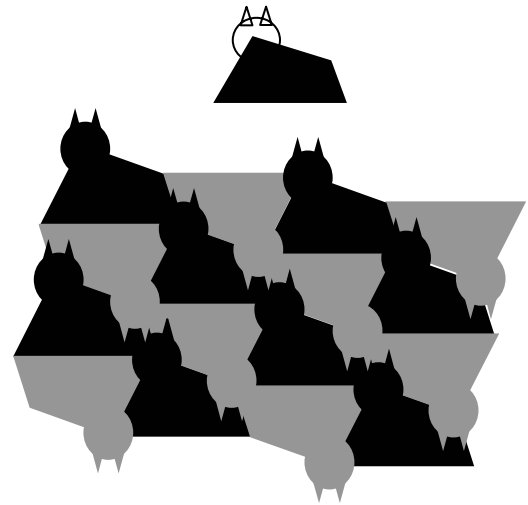



図５　一般の四角形をもとにした模様づくり

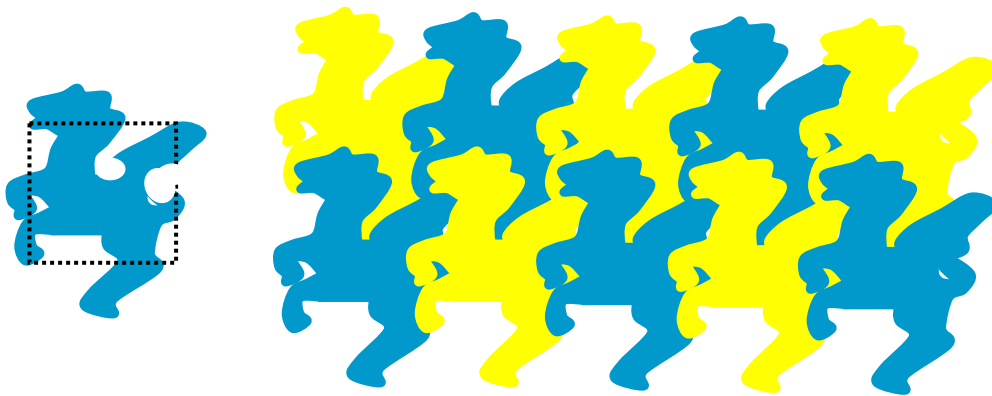



図６　エッシャーの作品の図柄例

出典情報

D.ネルソン・G.G ジョセフ・J.ウィリアムズ（根上生也・池田敏和訳）（1995）「数学マルチカルチャー　多文化的数学教育のすすめ」，pp.147－179，シュプリンガー・フェアラーク東京
野崎昭弘・何森仁・伊藤潤一・小澤健一（2003）「図形・空間の意味がわかる」，pp.92－93　ベレ出版
日本テセレーションデザイン協会　ホームページ　2005 年２月 18 日以下より検索，
http://tessellation.circle.ne.jp/newhp/

事例シート

題材分類	小算５

題材主題	全国高校野球選手権大会の試合数は？
副題	全国高校野球選手権大会をトーナメントでおこなったら、優勝校が決まるまで何試合？

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	D　数量関係	（４）簡単な式で表されている数量の関係	変わる様子を表に書いて	勝ち抜き戦、不戦勝、１対１の対応

学習内容のキーワード	対戦表、勝ち抜き戦、不戦勝、表、１対１の対応	活用場面のキーワード	スポーツの試合数、囲碁・将棋の勝ち抜き戦、山の木の本数を数える

題材とその活用場面

夏の高校野球や囲碁・将棋は勝ち抜き戦でおこなわれる。この試合数をどうやってだすのかは、数学的な表を使って計算されることが多い。大会費用や場所の確保のためには、試合数がいくつになるかは大事な問題である。全国高校野球のように 4000 校以上の参加校がある場合はその計算は大変であるが、対戦表による計算だけでなく、見方を変えると試合数は一発で出せてしまう。さて、その『数学的見方』とは何か？トーナメントの試合など、世の中のさまざまな計算や現象の中にある「変わらない本質的な規則」の発見は、物事をわかりやすく、すばやく答えを見つけるのに役立っている。

説明

勝ち抜き戦（トーナメント）というのは、いろいろなところで利用される試合の一つである。学校のドッジボール大会のように参加チームが８チームのときなら、図１のように対戦表で簡単に出せる。ただ、全国高校野球選手権大会のように、地方大会からの試合数が 4056 校となると、対戦表で簡単に出せるとは言えない。試合数を出すには、対戦表や表を作って地道にやってみて、「数学的なきまり」を見つけるのがいい。たとえば、５チーム、１０チームのように、チーム数が少ないときから考えてみよう。図２のように、１０チームの対戦表を作ってみると、「不戦勝」のチームが出ることがわかる。それを、考えて、2+4+2+1=9 と９試合とわかる。今度は、不戦勝を１回戦ですべて持ってきて試合数を計算する方法を表１のような試合表で考えてみよう。対戦は２チームで行われるのだから、チーム数が２を何回かかけた数（2, 4, 8, 16, 32, 64,・・）だけあれば、不戦勝はなくてすむ。この考えを使い、「不戦勝が無くてすむチーム数（２を何回かかけた数）」―「実際のチーム数」が１回戦の不戦勝の数（試合をしないチーム数）となる。こうすると、２回戦３回戦は簡単なわり算で試合数が出る。この考えで、試合表から試合数を出すと、５チームでは４試合、１０チームでは９試合ということがわかる。この試合数と、チーム数から何か気づかないだろうか。そう、「試合数は、チーム数より１少ない」というきまり。実は、「１試合ごとに１チーム負ける」ということを、試合数と結びつけて考えると、「全試合数＝負けチームの数」という法則があることがわかる！4056 校もの高校が参加する試合でも、試合数は、4056-1=4055 と簡単に出せる。この、考えは１対１の対応の考えで、それは、森の中の木の数のように、不特定多数の数を数えるのに昔から使われてきている。

（有田八州穂）

題材分類	小算５

添付図表

図１

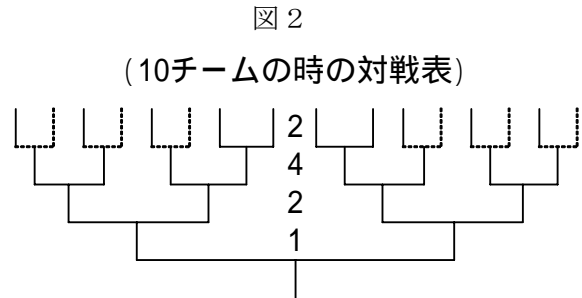
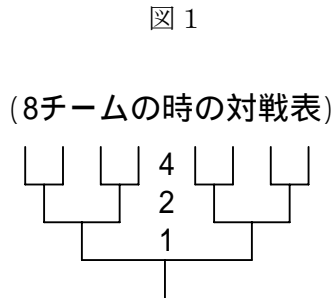
図２

点線は、１回戦不戦勝、実線が試合。

表１　５，１０チームの試合表

チーム数	不戦勝数 チーム数	1 回戦 チーム数	1 回戦 試合数	2 回戦	3 回戦	4 回戦
5	3	2	1	2	1	
10	6	4	2	4	2	1

1 回戦不戦勝チームの出し方は、

5 チームのとき、2×2×2＝8 チームあれば不戦勝を出さなくてすむ。8－5＝3 チームが不戦勝

10 チームのときは、2×2×2×2＝16。16－10＝6 チームが不戦勝。

出典情報

中村義作（1999）『数学が面白くなる本』pp. 44-46　三笠書房

岡部恒治（2003）『楽しく学ぶ数学基礎』数研出版

事例シート

題材分類	小算５

題材主題	土地の面積計算は三角形で
副題	地積測量図への面積の公式の応用

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数５年	B　量と測定	（１）平面図形の面積	ア　三角形平行四辺形の面積	
中学３年数学	B　図形	（１）相似	ウ　相似の考えの活用	
高校数学 I	（３）図形と計量	イ　三角比と図形	（ア）正弦定理、余弦定理	

学習内容のキーワード	三角形の面積、相似図形、測量	活用場面のキーワード	地積、土地測量

題材とその活用場面

土地の登記では、その土地の所在地、形などと並んでその土地の面積が重要な情報です。面積を計算した公図が地積測量図です。この面積の計算では、土地を三角形に分割します。三角形に分割すると、三角形の相似条件より３辺で土地の形が確定するからです。また、その面積を最も基本的な三角形の面積の公式を用いて計算しています。三角形の面積の計算や、相似の学習は不動産の仕事に使われているのです。

説明

図は、架空の土地の地積測量図の例です。四辺形を二つの三角形に分割して、それぞれの底辺×高さを計算しています。これをそれぞれの「倍面積」といいます。二つの倍面積を加えてから 2 で割れば、この土地全体の面積になります。この計算法を「三斜求積法」と呼んでいます。

この例では、土地を三角形 2 つに分けましたが五角形であれば３つの三角形に分けて計算します。

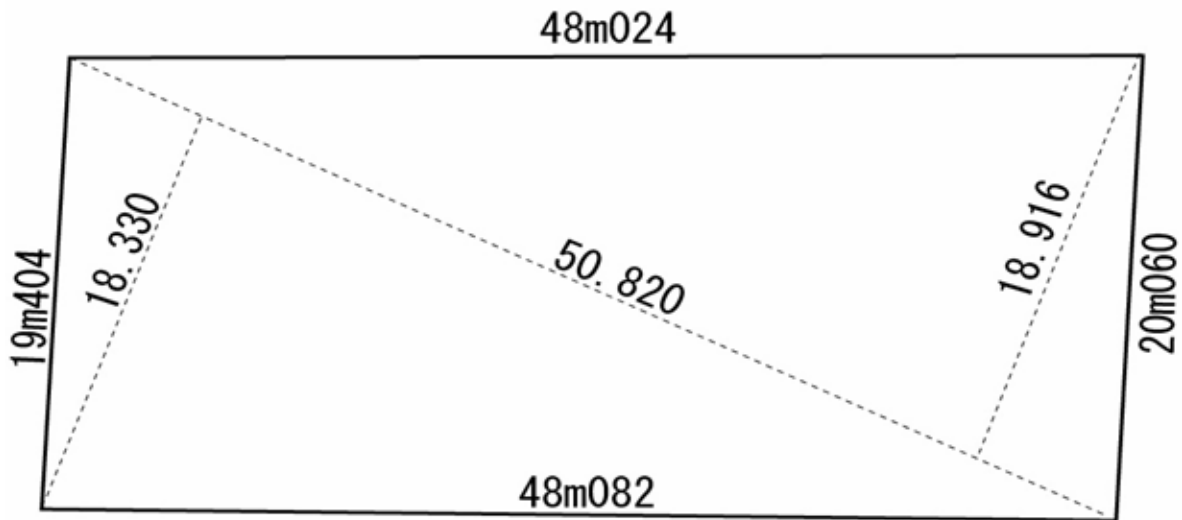
なぜ、三角形に分けるのかといいますと、三角形は、三角形の合同条件によって、３辺の長さがわかれば、その形が一つしかないので、形が確定するからです。公図に描かれた三角形についていえば、縮尺を決めれば、三角形の相似条件によって、図の上の形が一つに決まるといえます。

三角形の 3 辺がわかれば、面積はヘロンの公式で出すこともできますが、この基本的な計算を用いるのはなぜでしょう。一つには、三角形の面積の計算は誰にでも理解され、納得できます。さらに、ヘロンの公式を用いると 4 つの量をかけてそれの平方根を取るという面倒な計算です。それなら、どうせ測量をするのですから、三角形一つにつき測量を 1 回増やしたほうがラクということがあります。

（岡部恒治）

題材分類	小算５

添付図表

地積測量図の例

求積表

地番	４－１４		
	底辺	高さ	倍面積
	50.820	18.916	961.31112
	50.820	18.330	931.53060
		合　計	1892.84172
	合　計	面　積	946.42086
		地　積	946.42

出典情報

事例シート

題材分類	小算６

題材主題	イチローの年間安打数を予測してみる
副題	比例を活用したデータ分析による問題解決

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数6年	B　量と測定 D　数量関係	（１）異種の２つの量の割合 （１）簡単な比の意味 （２）比例の表とｸﾞﾗﾌ	ア　単位量あたりの考え	
中学数学1年	C　数量関係	(1)比例と反比例		

学習内容のキーワード	単位量あたりの考え　割合　比例 比例の式、表、グラフ	活用場面のキーワード	野球　イチロー

題材とその活用場面

イチローの大リーグ年間最多安打の新記録達成は、まだ記憶に新しいところです。しかし、彼の今シーズン開幕当初の成績からは、これほどの記録が樹立されると予想したメディアはほとんどありませんでした。当初の成績からその後を予測するときに、「このペースでいけば･･･」という表現が使われることがあります。この際には、割合の考えや比例の内容が用いられています。

割合の考えや比例の学習は、スポーツの分野でも活用されています。

説明

イチローのこのシーズンの安打数の推移を、ほぼ 30 試合ごとにまとめてみます。（図１）それによると、開幕当初 30 試合時点での安打数は 40 本です。割合の考えを用いると、１試合あたりおよそ 1.3 本のペースです。かりに、このペースのままでいくとするならば、シーズン終了近い 160 試合目までの安打数はおよそ 213 本くらいだろう、という予測ができます。その計算方法は、次のようなものです。

比を用いると、　30：40＝160：x　　x＝213.33･･･

比例の式を用いると、　$y=\frac{4}{3}x$　　x＝160 のとき、y＝213.33･･･

１シーズンに 200 本以上の安打を記録することは、決して簡単なことではないと思いますが、イチローの過去の実績から考えれば、例年並みという予測になるのかもしれません。ところが、安打数は 90 試合を超えたあたりから急激に増えていきます。実際、120 試合終了時点あたりから、周囲の記録への関心が高まりました。

このような予測に際しては、比例のグラフが用いられることがあります。グラフは、その関係をより視覚的にわかりやすく表現することができます。たとえば、図１の数値をグラフ上にプロットしてみます。（図２）

かりに、40 試合目までのペースでいくとするならば、原点と点アを結んだ直線①のグラフと見なすことができます。また、120 試合目までのペースでいくとするならば、原点と点イを結んだ直線②のグラフと見なせます。このペースなら、年間の安打数の新記録がうまれる、ということの予測ができます。①と②のグラフとも原点を通る直線ですから、比例のグラフと見ることができます。試合数と安打数の関係について、比例の関係とみて調べたわけです。

ただし、グラフを用いて予測をする際には、どのように直線をひくかが問題となります。プロットされた点を見ればわかるように、すべての点が直線上にならぶことはまずありません。ならんだ点をできるだけ通るような直線や、あるいは点のばらつきぐあいにもっとも近いと考えられる直線をひきます。ちなみに、120 試合目までの時点のグラフ上の４点から、直線③のグラフを引いてみます。ここからは、シーズン終了時に 240 本くらい、という予測も出てきます。

比例は、関係が単調であることから、いろいろな事象の予測に活用されることがあります。安打数などは、打者の体調や打席に立った時の状況など、多くの複雑な状況が関係してきます。影響の少ない要因はできるだけ取り去って、単純な比例関係で考えるわけです。最近では、コンピュータのデータ処理ソフトなどを使えば、点をプロットするだけで、そのならび方に近いグラフを書いてくれたり、直線の式を求めてくれたりします。

比例と見なした直線のひき方に本当に問題がないかどうか、あるいは結果にどの程度の信頼性があるか、などについては、高等学校以降で「検定」という内容を学習することでより深まっていきます。

（山崎浩二）

題材分類	小算６

添付図表

試合数	安打数
0	0
30	40
60	89
90	126
120	196
150	243
159	259

図1　イチローの2004年シーズンの安打数の推移（表）

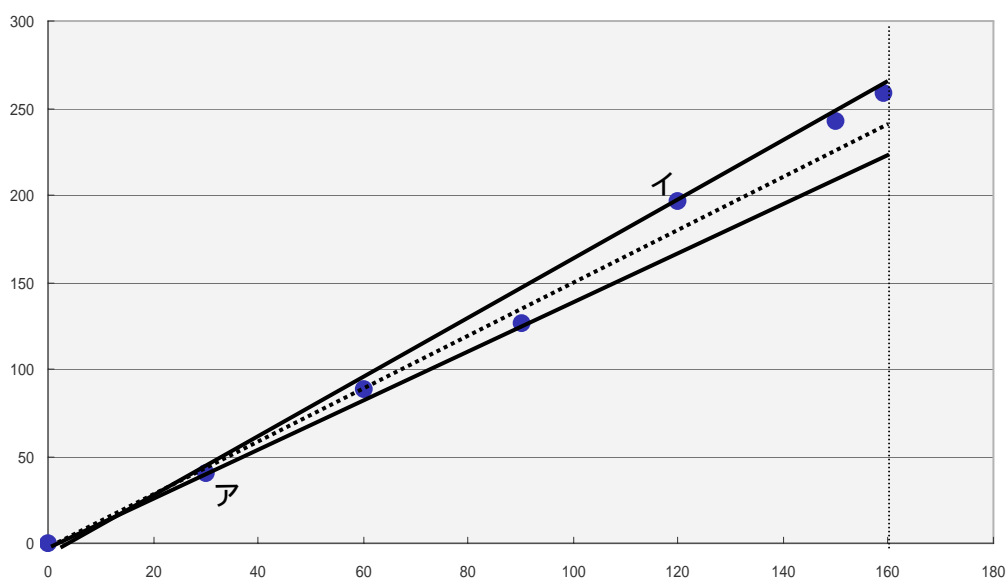



図2　イチローの2004年シーズンの安打数の推移（グラフ）

出典情報

L.A.スティーン編（三輪辰郎訳）（2000）『世界は数理でできている』，丸善

Ｊ.アルバート，Ｊ.ベネット（加藤貴昭訳）（2004）『メジャーリーグの数理科学（上）』，pp.58－64 シュプリンガー・フェアラーク東京

題材分類	小算６

題材主題	バーコードには倍数!
副題	バーコードやISBNコードのCDに用いられている倍数

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数6年	Ａ　数と計算	（１）約数・倍数		

学習内容のキーワード	倍数　数の見方	活用場面のキーワード	バーコード（JANコード）

題材とその活用場面

多くの商品につけられているバーコードには、必ずCD（チェックデジットCheck Digitの略称）と呼ばれる数字が盛り込まれています。

スーパーのレジなどでは、専用機を使ってこのバーコードに盛り込まれた情報を読みとります。CDは、この情報が正確に読みとられたかをチェックするための数字で、そこでは「ある数の倍数になるか」を調べています。

倍数という数の見方の学習は、日常のごく身近な生活の中に活用されています。

説明

私たちがふだんよく見るバーコードはJANコード（EANコード）と呼ばれるものです。このバーコードの下に書かれている数字は、その商品の製造した国名とメーカー名、商品の名前などを表しています。

例えば、ある商品のバーコードの下の数字が次のようだったとします。

例）　4901480507231　（図１参照）

最初の49は製造された国名を表しています。ちなみに、49は日本で、アメリカやカナダならば０～９、イギリスは50、フランスは30～37、韓国88.0となります。次の01480は製造したメーカー名、その次の50723は商品名をそれぞれ表しています。そして末尾の１がCDにあたります。

これらの数字は、CDにあたる１を除いて、以下のような計算式に当てはめられます。

（奇数順の数字の和）＋３×（偶数順の数字の和）　・・・　①

この計算結果が「必ず１０の倍数になる」ように、CDが決められます。例では、

（４＋０＋４＋０＋０＋２）＋３×（９＋１＋８＋５＋７＋３）＝109

となり、したがってCDにあたる数字は「１」となるわけです。レジ等では、専用機を使って一瞬のうちに上の計算を行い、それが10の倍数であることをもって「正常に読みとれた」と判断するわけです。

このようなJANコードは、ほかにも書籍や雑誌などに見られます。例えば、書籍のJANコードは２段になっています。上段は、国名や出版社等を示すISBNコードとよばれるもので、国際標準となっています。下段は、本の分類や価格を示すもので、これは国内独自のコードです。２つのコードとも、末尾にはCDが設定されています。読みとった際に、その計算結果（計算式は①の式とは違います）が必ず11の倍数になるようになっています。

（山崎浩二）

題材分類	小算６

添付図表

図1　JANコードとそのしくみ

国名　出版社名　書籍名

978
ISBN用プレフィクス
I1 I2 I3 I4 I5 I6 I7 I8 I9
ISBN（チェック数字を除く）
C/D
チェックデジット

192
C1 C2 C3 C4
図書分類
P1 P2 P3 P4 P5
税抜本体価格（1円単位）
C/D
チェックデジット
書籍JANの2段目を表すプレフィクス（国内用）

図2　書籍 JAN コードとそのしくみ

標準タイプ13桁（JANメーカーコード9桁バージョン）

短縮タイプ8桁

標準タイプ13桁（JANメーカーコード7桁バージョン）

① JANメーカーコード
② 商品アイテムコード
③ チェックデジット

図3　JANコードのタイプ

出典情報

芳沢光雄（2000）「高校「数学基礎」からの市民の数学」，pp.17－20　日本評論社

財団法人流通システム開発センター　ホームページ　2004 年 10 月 14 日以下より検索,

URL:http://www.dsri-dcc.jp/company/jan/02.htm

事例シート

題材分類	小算６

題材主題	平均からどんなことがわかるか
副題	資料（データ）の整理の方法を考えてみよう

学習指導要領の教科・科目	学習指導要領の大項目	学習指導要領の中項目	学習指導要領の小項目	備考
小学算数６年	D 数量関係	（３）平均の意味		
小学算数４年	D 数量関係	（３）資料の分類整理とグラフ		

学習内容のキーワード	資料の整理、平均、中央値 度数分布、ヒストグラム	活用場面のキーワード	クラスやまわりの人たちから、スポーツやテレビから、色々なデータを集め整理してみよう。

題材とその活用場面

私たちのまわりには、10 個位のものから数十万あるいはそれ以上の個数のものまで色々な資料（データ）があります。資料の全体としての傾向をつかむには、度数分布やヒストグラムを用いたり、平均値や中央値を計算して全データを要約したりします。

平均値は誰にでもなじみのある用語ですが、資料のまとめについて具体的な例を使って説明してみましょう。資料のまとめ方について学習することは、身長や人口、給与といった実際のデータをどう読み、それらの違いをどう識別するかといったことに活用されています。

説明

資料（データ）の多くは１つ１つ異なっていて、全体の傾向を知ることは面倒です。データをまとめる方法の１つに度数分布（ヒストグラム）があります。図１は幼児の身長の分布で、このようにデータを図で表すと全体の傾向が見えてきます。

表１は小学生から高校生までの学年別の平均身長を男女別にまとめたものです。表には 30 年前の（親の世代の）平均ものせてあります。学年ごとに全国で何十万人の生徒がいて、身長の大きさもバラバラですが、平均にまとめると、学年間の比較がわかりやすくなっています。表からは小学校低学年では男子のほうが女子よりも少し高いのですが、５年生で女子のほうが大きくなり、中学１年でまた逆転するといったことや、今の生徒は 30 年前の親の世代よりも各学年で数センチ身長が大きくなっていることなどがわかります。

表２には、政令指定都市と東京特別区の人口をあげてみました。東京の人口がダントツに大きく、他の市の多くは 100 万人あたりに集中しています。また図３は働く人の年間の給与の分布を示しています。先にあげた身長の分布と異なった形をしていますが、こういった「ゆがみ」のあるデータの平均を取ると、データに含まれる大きな値に引っ張られて平均値は大きくなる傾向にあります。このようなデータに使われるのに中央値があります。中央値はデータを大きさの順に並べて真ん中にくる値です。給与でいえば、その値よりも多い給与の人、少ない給与の人がちょうど半々になる値ということになります（図２の中央値は 210、平均値はほぼ 230 です）。このようなデータでは平均値と中央値で大きな違いがあるのがわかります。

このように、データの傾向や特徴にあわせそれらを要約し説明するための色々な方法が工夫されています。

（松井敬）

題材分類	小算６

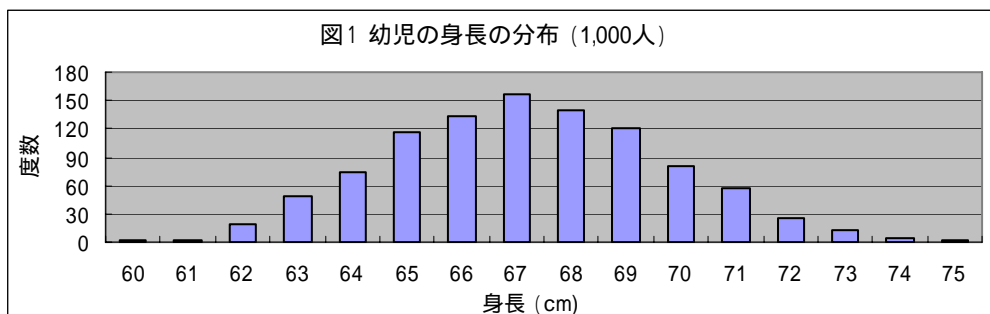
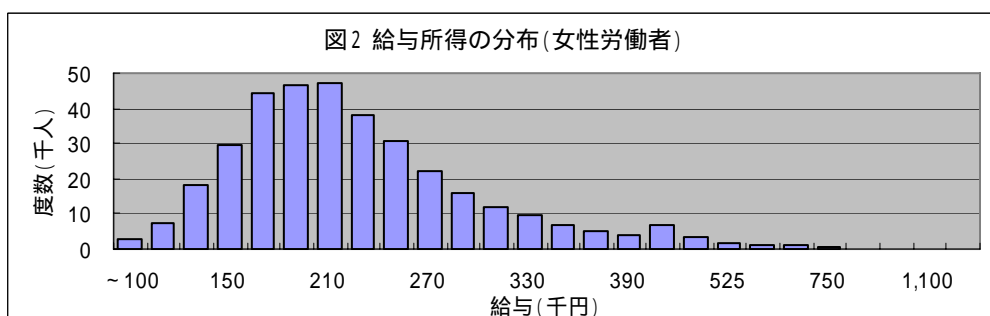
添付図表

表1 年齢別身長の平均値 (cm)

		2004年		1974年	
		男子	女子	男子	女子
小学校	6歳	116.8	115.8	115.2	114.5
	7歳	122.6	121.6	120.5	119.8
	8歳	128.1	127.5	126.4	125.8
	9歳	133.9	133.5	131.3	131.1
	10歳	138.9	140.2	136.4	137.4
	11歳	146.1	146.9	141.7	143.9
中学校	12歳	152.6	152.1	148.3	149.5
	13歳	159.9	155.2	155.8	153.0
	14歳	165.3	156.7	161.9	154.7
高等学校	15歳	168.4	157.2	165.9	155.6
	16歳	170.0	157.7	167.7	156.1
	17歳	170.8	157.9	168.7	158.2

表2 都市人口 (万人)

	都市名	人口
1	千葉	92
2	北九州	100
3	仙台	103
4	さいたま	107
5	広島	114
6	川崎	131
7	福岡	139
8	京都	146
9	神戸	152
10	札幌	187
11	名古屋	220
12	大阪	263
13	横浜	356
14	東京特別区	839
	平均値	210.6
	中央値	142.5

出典情報

http://wwwdbtk.mhlw.go.jp/toukei/index.html （厚生労働省統計表データベース）

http://www.mext.go.jp/b_menu/toukei/main_b8.htm （文部科学省各種統計情報）